Exercice 1

Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f et $D_{f'}$, l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$ dans chacun des cas suivant :

1) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{2}{x}$

2) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$

3) $f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)^3$

4) $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x}$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-1}}$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

7) $f(x) = 3\sin(2x)$

8) $f(x) = 5\cos(3x-2)$

9) $f(x) = \frac{2\sin x}{3 - \cos x}$

10) $\begin{cases} f(x) = 2x + \sqrt{x} \ ; x \geq 0 \\ f(x) = \sin(2x) \ ; \ x < 0 \end{cases}$

11) $f(x) = \frac{|x-4|}{2x-3}$

12) $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x} + 1$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Etudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = \left[0, \frac{1}{4}\right]$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Etudier la dérivabilité de la fonction g^{-1} sur J

c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in J$

d) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

4) Construire dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 4\sqrt{x-1}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Etudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, et interpréter graphiquement ce résultat

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$ pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 2

b) Construire dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe $\left(C_f\right)$ et la tangente (T)

4) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $\mathrm{I}=\left[5,+\infty\right[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Calculer $g(10)$ et en déduire $g^{-1}(-2)$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en -2 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(-2)$

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathrm{J}$

e) Construire dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_{g^{-1}}\right)$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-x$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère Orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Déterminer D_f son ensemble de définition

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

c) Déterminer les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 0 et interpréter ce résultat graphiquement

b) Montrer que $f'(x)=-\left[\dfrac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}+1\right]$ pour tout $x\in D_f-\{0\}$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

3) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α tel que $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$

4) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $\mathrm{I}=\left]1,+\infty\right[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$