## Exercice 1 :

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$P:"(\forall x\in\mathbb{R});x\geq 0\ ou\ x\leq 0".$

$Q:"(\exists x\in\mathbb{R});\ x^2>5\ et\ x\in\mathbb{Z}".$

$R:"(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});\ |xy|=xy\Rightarrow (x+y)^2\geq x^2+y^2".$

$S:"(\forall a\in\mathbb{R});\ a^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\mathbb{Z}".$

$T:"(\forall \varepsilon>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in\mathbb{R});\ |x|<\alpha\Rightarrow\left|\frac{x}{x^2+2}\right|<\varepsilon".$

$L:"(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3);\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{5}".$

## Exercice 2 :

1/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});-x^2+x-1<0.$

2/ On considère la proposition $P:"(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R});-x^2+x-1\geq y"$

a/ Donner la négation de la proposition $P$.

b/ En déduire que la proposition $P$ est fausse.

## Exercice 3

1) $(\forall a>0)(\forall b>0),\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

2/ a) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R}^+)(\forall b\in\mathbb{R}^+);\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$

b) En déduire que : $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15})\geq 8\sqrt{15}.$

## Exercice 4

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2x^2-|x-3|-4=0.$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases}2|x+1|-y=4\\|x+2|+2y=6\end{cases}.$

## Exercice 5

1/ Montrer que : $(\forall a\in]1;+\infty[);\frac{a^2}{a-1}\geq 4.$

2/ Montrer que : $(\forall a\in]1;+\infty[)(\forall b\in]1;+\infty[);\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8.$

## Exercice 6

1/ Démontrer que : $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}.$

2/ Montrer que : $\forall(p,q)\in\mathbb{Z}^2;p+q\sqrt{2}=0\Rightarrow p=q=0.$

## Exercice 7

1/ Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de $n^2$ par $5$.

2/ Montrer par l'absurde , que : $\forall n \in \mathbb{N};\ \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

3/ Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

## Exercice 8

Montrer par récurrence, que :

1/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 4^{2n+2} - 1$ est un multiple de $15$.

2/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 2^{3n} - 1$ est divisible par $7$.

3/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 7^{2n} + 3$ est un multiple de $4$.

4/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ( On note : $\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+\ldots+n$).

5/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

7/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 2^n > n$.

8/ Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

9/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \times \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{k} \times \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

10/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

11/ $\forall n \in \mathbb{N};\ n^3 + 11n$ est un multiple de $6$.

12/ $\forall n \in \mathbb{N};\ 7$ est un diviseur de $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

13/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est un multiple de $17$.

14/ $\forall n \in \mathbb{N};\ \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

15/ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6\ ;\ 2^n \geq (n+2)^2$.

16/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 4^n + 6n - 1$ est divisible par $9$.

17/ $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^k = \dfrac{4 \times 5^{n+1} - (5+n) \times 4^{n+1}}{5^n}$.