



Exercice 1

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x}$

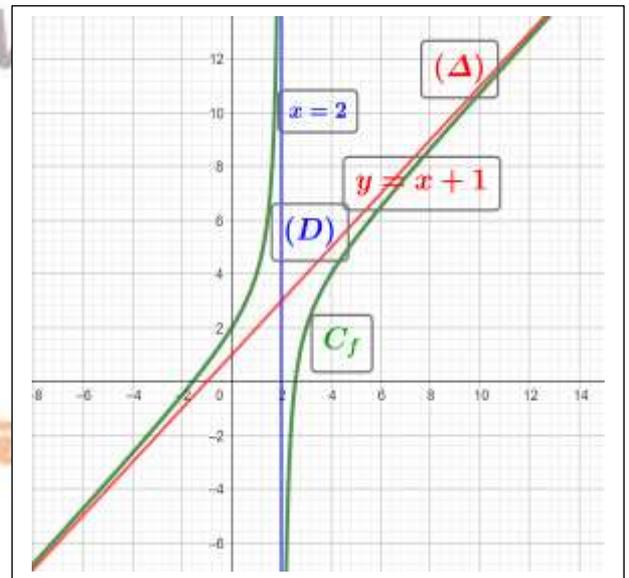
- 1/ Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .
- 2/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- 3/ Etudier les branches infinies de C_f .
- 4/ Etudier la dérivabilité à droite en $x_0 = -1$ et donner une interprétation graphique de ce résultat
- 5/ Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 6/ Construire C_f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 2

La courbe ci-contre est la courbe représentative (C_f) d'une fonction f définie sur son ensemble de Définition D_f . Les droites (Δ) et (D) sont les asymptotes à la courbe (C_f) d'équations respectives $y = x + 1$ et $x = 2$.

A partir du graphique et des renseignements fournis, répondre aux questions suivantes :

- 1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de D_f
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x - 1$
- 4) Déterminer le signe de $f(x) - x - 1$
- 5) Dresser le tableau de variation de la fonction f



Exercice 3

I - Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R}
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} et que $2 < \alpha < 3$
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

II - Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe (C_f)
- c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)



2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ et montrer que : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2

b) Construire la courbe (C_f) et les droites (D) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(on prend $\alpha \approx 2,2$ et $f(\alpha) \approx 5,3$)

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{2}{x} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ \frac{1+x}{2\sqrt{x}} & ; x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

b) Calculer $f(-2)$; $f(-\sqrt{2})$; $f(-1)$; $f(1)$ et $f(4)$

2) a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b) Donner l'équation de la demi-tangente (Δ_1) à gauche en $x_0 = 1$

c) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$, dont on donnera l'équation réduite

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

5) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de 0

6) a) Montrer que :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \frac{2}{x^2} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ \frac{x-1}{4x\sqrt{x}} & ; x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

b) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation

7) a) Donner l'équation de la tangente (Δ_2) à (C_f) au point d'abscisse $-\sqrt{2}$



- b) Construire les droites (D) , (Δ_1) , (Δ_2) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 8) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $] -\infty, 0[$
- a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- b) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et en déduire $g^{-1}(0)$
- c) Construire dans le même repère la courbe représentative de g^{-1} que l'on notera $(C_{g^{-1}})$
- d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1} + 2$
 et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b/ Etablir que : $\forall x \in [1; +\infty[; f(x) - x = \frac{4-2x}{1+\sqrt{x-1}}$

c/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de

$x_0 = 1$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{x-2}{(1+\sqrt{x-1})\sqrt{x-1}}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3/ a/ donner l'équation de la tangente (T) à la courbe

(C_f) au point d'abscisse $x_1 = 5$

b/ Construire les droites (T) , (Δ) et la courbe (C_f)

4/ On considère g la restriction de la fonction f sur

L'intervalle $I = [2; +\infty[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b/ Calculer $g(2)$ et $(g^{-1})'(2)$

c/ Construire dans le même repère la courbe $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

et soit C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f



- 2/ Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat
- 3/ a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b/ Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et $-\infty$ dont on déterminera l'équation
 c/ Etudier la position relative de la courbe C_f et la droite Δ
- 4/ a/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à gauche et interpréter ce résultat graphiquement
 b/ calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f - \{0\}$ puis dresser le tableau de variation de f
- 5/ a/ Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et que $\alpha \in \left]2; \frac{5}{2}\right[$
 b/ Montrer que : $\alpha - \alpha^{\frac{1}{3}} = 1$
- 6/ a/ Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2
 b/ Construire C_f , Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 7/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$
 a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 b/ Montrer que $(g^{-1})'(0) = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$
- 8/ Construire dans le même repère que C_f la courbe $C_{g^{-1}}$
- 9/ Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.