Exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1:"(\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq 1"$; $P_2:"(\exists x\in\mathbb{R}): x^2-2=0"$; $P_3:"(\forall n\in\mathbb{N}); \frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$; $P_4:"(\forall n\in\mathbb{N})(\exists m\in\mathbb{N}): n<m"$

$P_5:(\exists n\in\mathbb{N}); 2n+1 \text{ est pair}"$; $P_6:"(\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R}): b-a>0"$; $P_7:"(\exists! x\in\mathbb{Z}): \frac{x}{4}+1\in\mathbb{Z}"$

Exercice 2

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1/ $\overline{(P\wedge Q)}\Leftrightarrow(\bar{P}\vee\bar{Q})$; 2/ $\overline{(P\vee Q)}\Leftrightarrow(\bar{P}\wedge\bar{Q})$; 3/ $[P\wedge(Q\vee R)]\Leftrightarrow[(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)]$;

4/ $[P\vee(Q\wedge R)]\Leftrightarrow[(P\vee Q)\wedge(P\vee R)]$

Exercice 3 :

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1/ Le carré de tout réel est positif

2/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré

3/ Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres

4/ Tous les réels ne sont pas des rationnels

5/ Entre deux réels distincts , il existe un rationnel

Exercice 4 : Raisonnement direct

1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l}0<x<2\\0<y<2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>1$$

2/ Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

3/ Montrer que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+2}); x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

4/ Montrer que : $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2); a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\leq\sqrt{2}$

5/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 5 : Raisonnement par disjonction des cas

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$a/\ |x-2|=3$ $b/\ |2x|-|x+1|=5$ $c/\ |2-x|+3x+2=|x+5|$ $d/\ x^2-|x-2|+1=0$

2/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}); n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 6 : Raisonnement par la contraposée

1/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que : $(x\neq 2 \text{ et } y\neq 2)\Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

2/ Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. Montrer que : $x\neq -8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq 2$

3/ Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

4/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice 7 : Raisonnement par l'absurde

1/ Soit $a>0$ et $b>0$. Montrer que : $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}\Rightarrow a=b$

2/ Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

3/ Montrer que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8 : Raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 3^n \geq 1+2n$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5);\ 2^n \geq 6n$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ n^3+2n$ est divisible par 3

4/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 4^n+6n-1$ est divisible par 9

5/ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6);\ 2^n \geq (n+2)^2$

6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1+2+3+4+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

7/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N});\ 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 9 : Raisonnement par contre-exemple

1/ Montrer que la proposition $P : "(\forall x \in [0,1]);\ x^2 \geq x"$ est fausse

2/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$

Montrer que la fonction f n'est ni paire ni impaire

3/ Montrer que la proposition $Q : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0"$ est fausse

Exercice 10 : Raisonnement par équivalence

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $|x-1| \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} \leq \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{2}{3}$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : \sqrt{x^2+1} = 2x$

3/ a/ Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{+^2}\right);\ a+b=0 \Leftrightarrow a=b=0$

b/ En déduire que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right);\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x=y=0$