Exercice 1

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$

1/ Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .

2/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f

3/ Etudier les branches infinies de C_f .

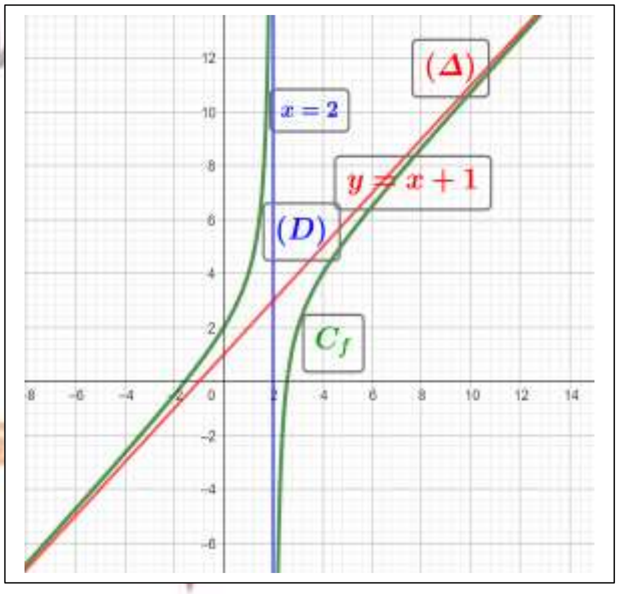
4/ Etudier la dérivabilité à droite en $x_0 = -1$ et donner une interprétation graphique de ce résultat

5/ Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6/ Construire C_f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 2

La courbe ci-contre est la courbe représentative (C_f) d'une fonction f définie sur son ensemble de Définition D_f . Les droites (Δ) et (D) sont les asymptotes à la courbe (C_f) d'équations respectives $y = x+1$ et $x = 2$.



A partir du graphique et des renseignements fournis, répondre aux questions suivantes :

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f

2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x-1$

4) Déterminer le signe de $f(x)-x-1$

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f

Exercice 3

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

II – Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x+2$ est une asymptote à la courbe (C_f)

c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ et montrer que : $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 2

b) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et les droites (D) et (T) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(on prend $\alpha \simeq 2,2$ et $f(\alpha)\simeq 5,3$)

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x)=-x+\dfrac{2}{x} & ; x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} & ; x\in [1,+\infty[\end{cases}$

$\left(C_f\right)$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que f est continue en $x_0=1$

b) Calculer $f(-2)$; $f\left(-\sqrt{2}\right)$; $f(-1)$; $f(1)$ et $f(4)$

2) a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0=1$

b) Donner l'équation de la demi-tangente $\left(\Delta_1\right)$ à gauche en $x_0=1$

c) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que $\left(C_f\right)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$, dont on donnera l'équation réduite

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

5) Etudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de 0

6) a) Montrer que : $\begin{cases} f'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2} & ; x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ f'(x)=\dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}} & ; x\in]1,+\infty[\end{cases}$

b) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation

7) a) Donner l'équation de la tangente $\left(\Delta_2\right)$ à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse $-\sqrt{2}$

b) Construire les droites (D), (Δ_1), (Δ_2) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty,0[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et en déduire $g^{-1}(0)$

c) Construire dans le même repère la courbe représentative de g^{-1} que l'on notera $(C_{g^{-1}})$

d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $g^{-1}(x)$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}+2$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b/ Etablir que : $\forall x\in[1;+\infty[;\ f(x)-x=\dfrac{4-2x}{1+\sqrt{x-1}}$

c/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[;\ f'(x)=\dfrac{x-2}{(1+\sqrt{x-1})\sqrt{x-1}}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3/ a/ donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_1=5$

b/ Construire les droites (T), (Δ) et la courbe (C_f)

4/ On considère g la restriction de la fonction f sur L'intervalle $I=[2;+\infty[$

a/ Montrer que admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b/ Calculer $g(2)$ et $(g^{-1})'(2)$

c/ Construire dans le même repère la courbe $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-1-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

et soit C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2/ Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat

3/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b/ Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ *et* $-\infty$ dont on déterminera l'équation

c/ Etudier la position relative de la courbe C_f et la droite Δ

4/ a/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à gauche et interpréter ce résultat graphiquement

b/ calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f - \{0\}$ puis dresser le tableau de variation de f

5/ a/ Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α sur l'intervalle

$]1; +\infty[$ et que $\alpha \in \left]2; \frac{5}{2}\right[$

b/ Montrer que : $\alpha - \alpha^{\frac{1}{3}} = 1$

6/ a/ Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2

b/ Construire C_f , Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

7/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b/ Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(0) = \dfrac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$

8/ Construire dans le même repère que C_f la courbe $C_{g^{-1}}$

9/ Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.