



Exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1: "(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 1)" ; P_2: "(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 - 2 = 0" ; P_3: "(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n}{2} \in \mathbb{N}" ; P_4: "(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}): n < m"$$

$$P_5: "(\exists n \in \mathbb{N}); 2n+1 \text{ est pair}" ; P_6: "(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}): b - a > 0" ; P_7: "(\exists! x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} + 1 \in \mathbb{Z}"$$

Exercice 2

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$1/ \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q}) ; 2/ \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q}) ; 3/ [P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)] ;$$

$$4/ [P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

Exercice 3 :

Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1/ Le carré de tout réel est positif

2/ Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré

3/ Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres

4/ Tous les réels ne sont pas des rationnels

5/ Entre deux réels distincts, il existe un rationnel

Exercice 4 ; Raisonnement direct

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

3/ Montrer que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}); x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

4/ Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

5/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exercice 5 : Raisonnement par disjonction des cas

1/ Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$a/ |x-2|=3 \quad b/ |2x|-|x+1|=5 \quad c/ |2-x|+3x+2=|x+5| \quad d/ x^2 - |x-2| + 1 = 0$$

2/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 6 : Raisonnement par la contraposée

1/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

2/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

4/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 7 : Raisonnement par l'absurde

1/ Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$

2/ Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



3/ Montrer que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8 : Raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 1 + 2n$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5); 2^n \geq 6n$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N}); n^3 + 2n$ est divisible par 3

4/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

5/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6); 2^n \geq (n+2)^2$

6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

7/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 9 : Raisonnement par contre-exemple

1/ Montrer que la proposition $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$ $P: "(\forall x \in [0,1]); x^2 \geq x"$ est fausse

2/ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$

Montrer que la fonction f n'est ni paire ni impaire

3/ Montrer que la proposition $Q: "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x^2 - xy + y^2 = 0"$ est fausse

Exercice 10 : Raisonnement par équivalence

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $|x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

2/ Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $(E): \sqrt{x^2+1} = 2x$

3/ a/ Montrer que : $(\forall (a; b) \in \mathbb{R}^+); a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

b/ En déduire que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$