Exercice1

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1=2(1-3i)+(2-i)(5+2i)$; $z_2=(3+5i)^2$; $z_3=(2-3i)^2$; $z_4=\dfrac{2}{3+7i}$; $z_5=1-3i+\dfrac{2-i}{5+2i}$;

$z_6=(1+i)^2$; $z_7=(1-i)^2$; $z_8=\dfrac{2-3i}{1+2i}$; $z_9=\dfrac{1-\left(1+\sqrt{2}\right)i}{1+\left(1+\sqrt{2}\right)i}$; $z_{10}=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$; $z_{11}=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$;

$z_{12}=(3+2i)(1-5i)$; $z_{13}=\left(\sqrt{3}-2+i\right)^2$; $z_{14}=\dfrac{1+\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}+i}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(3-i)z+4-2i=0$; 2) $3iz+2-3i=(1+i)z-2$; 3) $(1+i)\overline{z}+(2-i)z+2-3i=0$

4) $2i\overline{z}+(1+i)z+3-i=0$; 5) $|z|+z-3-4i=0$; 6) $z^2-\overline{z}=0$; 7) $(1+i)z-2\overline{z}+3-2i=0$

7. $4z^2+8|z|^2-3=0$ 8. $z+3\overline{z}=(2+3i)z$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$, dans chacun des cas suivants :

1) $(z-i)\in\mathbb{R}$ 2) $2z+(1-i)\overline{z}\in\mathbb{R}$ 3) $2iz+3-5i\in i\mathbb{R}$ 4) $\dfrac{1+z}{z+i}\in i\mathbb{R}$; 5) $(2-3i)z+\overline{z}\in i\mathbb{R}$

6) $|z-2+3i|=|z+1-2i|$ 7) $|z+5-2i|=|\overline{z}-3+2i|$ 8) $|z-2+3i|=2$ 9) $|2\overline{z}-6+4i|=4$

10) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-2}\right)=1$; 11) $\mathrm{Im}(2+iz)=-2$; 12) $z+\overline{z}\in\mathbb{R}^-$

Exercice 4

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=-4+3i$; $z_2=2-(3+2i)i$; $z_3=\dfrac{2}{2+3i}$; $z_4=(2-2i)^3$; $z_5=\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}+1\right)i$; $z_6=(2+3i)(1-2i)^2$

$z_7=\dfrac{\left(2-i\sqrt{3}\right)^3}{1-i\sqrt{6}}$; $z_8=1+\cos\theta+i\sin\theta$ *où* $\theta\in]0,\pi[$; $z_9=1-\cos\alpha-i\sin\alpha$ *où* $\alpha\,]0,\pi[$

Exercice 5

Donner les écritures trigonométrique et exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1=3+i\sqrt{3}$; $z_2=5-5i$; $z_3=5$; $z_4=-7$; $z_5=12i$; $z_6=-i\sqrt{2}$; $z_7=2+2i$; $z_8=\sqrt{3}-i$

$z_9=\left(1+i\sqrt{3}\right)(2-2i)$; $z_{10}=\dfrac{5i}{2\sqrt{3}-2i}$; $z_{11}=\left(3-i\sqrt{3}\right)^4$; $z_{12}=(\cos\theta+i\sin\theta)^5$; $z_{13}=(\cos\theta-i\sin\theta)^3$

$z_{14}=\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ où $\theta\in]0,\pi[$; $z_{15}=\sin\dfrac{\pi}{7}-i\cos\dfrac{\pi}{7}$; $z_{16}=1-i\tan\dfrac{7\pi}{5}$

Exercice 6

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$(E_1): z^2-2z+5=0$; $(E_2): z^2+6z+25=0$; $(E_3): 2z^2-6z+7=0$; $(E_4)\,2z^2+5z-7=0$;

$(E_5): z^2+z+1=0;\quad (E_6): z^2-2z+4=0;\quad (E_7): z^2-8z+25=0;\quad (E_8): 2z^2+2z+5=0$

2) Déterminer les nombres complexes z et z' vérifiant :

$a)\begin{cases} z+z'=3 \\ z\times z'=3 \end{cases}$; $b)\begin{cases} z+z'=3-4i \\ 2z-z'=6+i \end{cases}$; $c)\begin{cases} 2iz-3z'=5 \\ z+iz'=2i \end{cases}$

Exercice 7

1) On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z)=z^3+\left(14-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-14i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}$$

a) Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$

b) Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$$

c) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$

Exercice 8

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=5-i$, $b=4-3i$ et $c=-2+2i$

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

2) Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Déterminer les affixes des points I, J et K

3) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme

Exercice 9

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=4+i$, $b=3-2i$, $c=-2+3i$ et $d=9i$

1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

2) Calculer $\dfrac{c-d}{b-a}$

3) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires

4) Que peut-on dire sur les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 10

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3+2i$, $b=4-3i$ et $c=-2+2i$

1) Déterminer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC

2) Déterminer l'affixe du milieu I de $[BC]$

3) Montrer que les points A, I et G sont alignés