Exercice1

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$1/\ f(x)=\ln(2x+3)$; $2/\ f(x)=\ln(x^2-4)$; $3/\ f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$

$4/\ f(x)=\ln\left(\dfrac{3x-2}{x+3}\right)$; $5/\ f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$; $6/\ f(x)=\dfrac{2x+3}{\ln(x-2)}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations suivantes :

$1/\ \ln(x-5)=0$; $2/\ \ln(3x+1)=\ln(2x-1)$; $3/\ \ln(x^2-4x+3)=\ln(x-1)$

$4/\ \ln(2x-3)\geq 0$; $5/\ \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)>0$; $6/\ \ln(2x+5)+\ln(x+1)\leq \ln 4$

Exercice 3

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

$1/\ f(x)=x\ln x$; $2/\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; $3/\ f(x)=\ln(x^2+3)$

$4/\ f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$; $5/\ f(x)=(\ln x)^2$; $6/\ f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$1/\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$; $2/\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\ln x}{x}$; $3/\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{x}$

$4/\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+x+2)}{x+3}$; $5/\ \lim\limits_{x\to1^+} (x-1)\ln(x-1)$; $6/\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

$1/\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$; $2/\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-1}$; $3/\ \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$

$4/\ \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x+1}}$; $5/\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-x\ln(x+2)$; $6/\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

Exercice 6

Déterminer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$1/\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)$; $2/\ f(x)=\ln|3x+2|$; $3/\ f(x)=\dfrac{x}{\ln(2-x)}$;

$4/\ f(x)=\ln(\ln x)$; $5/\ f(x)=x^2\ln x$; $6/\ f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

On note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité = 2 cm)

1) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet deux asymptotes dont on déterminera les équations

2) a) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) Résoudre l'équation $f(x)=0$

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente T au point d'intersection de la courbe avec l'axe des Abscisses

5) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite T

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-4,4[$ par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+4}{4-x}\right)$

On note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Montrer que la fonction f est impaire

b) En déduire que la courbe $\left(C_f\right)$ admet un centre de symétrie que l'on déterminera

2) Calculer $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat

3) a) Calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) a) Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0

b) Résoudre l'équation $f(x)=1$

5) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 9

A - On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+3-2\ln x$

1/ Etudier les variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variation

2/ Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

B - Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-1+2\ln x}{2x}$$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b/ Etudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

2/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

3/ a/ calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

4/ a/ Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b/ Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f) et les droites (D) et (T)

Exercice 10

I - Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x + (x-2)lnx$

1/ a/ Montrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + lnx$.

b/ En déduire que : si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$; et si $0 < x < 1$ alors $g'(x) < 0$.

2/ Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

3/ En déduire le signe de la fonction g.

II - On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, par : $f(x) = 1 + xlnx - (lnx)^2$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on prendra comme unité de mesure 2 cm.

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation de ce résultat .

3/ a/ Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4/ Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

5/ Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$h(x) = x - 1 - lnx$

a/ Etudier le sens de variation de la fonction h

b/ En déduire le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x.

c/ Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - x = (lnx - 1)h(x)$.

d/ En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (T) d'équation : $y = x$.

6/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{2x}{\ln x}, \ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f .

2/ a/ Calculer les limites de f aux bornes de D .

b/ Etudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$.

3/ a/ Montrer que f est continue en 0 à droite .

b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat .

4/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right);\ f'(x) = \dfrac{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2}{(\ln x)^2}$

b/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation .

5/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right);\ f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x(\ln x)^3}$

b/ Etudier la concavité de la courbe $\left(C_f\right)$.

6/ a/ Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse $x_0 = e$.

b/ Construire dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la droite (T) et la courbe $\left(C_f\right)$.