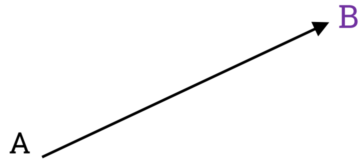
I – Vecteurs dans le plan

1 – Eléments d'un vecteur

Définition

Soit A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- Sa direction : la droite (AB)
- Son sens : de A vers B
- Sa norme : la distance entre A et B qu'on note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$



Remarques

- Le vecteur nul est le vecteur dont la norme est nulle, on le note $\vec{0}$
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $A = B$
- On a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

2 - Egalité de deux vecteurs

Définition

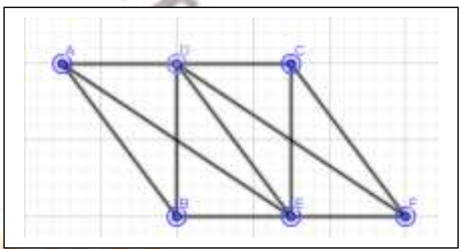
On dit que **deux vecteurs sont égaux** si et seulement si ils ont **la même direction**, **le même sens** et **la même norme**

Exemple

On considère la figure ci-contre. Recopier et compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB} = \quad = \quad ; \overrightarrow{AD} = \quad = \quad = \quad ; \overrightarrow{AE} =$

$\overrightarrow{BD} =$



Définition

Deux vecteurs sont dits opposés si et seulement si :

- Ils ont la même direction
- Ils ont la même norme
- Ils ont des sens opposés

Si A et B sont deux points du plans, le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Proposition (Règle du parallélogramme)

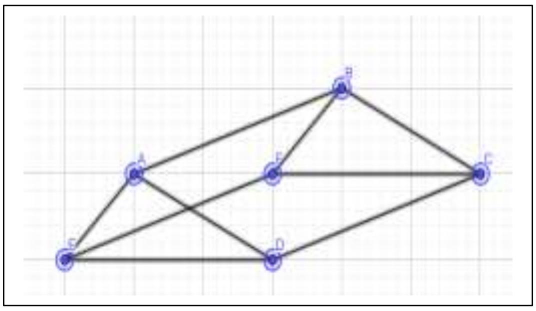
Soit A, B, C et D quatre points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ équivaut à } \begin{cases} \text{Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme} \\ \text{ou les quatres points A, B, C et D sont alignés} \end{cases}$$

Application

Sachant que les quadrilatères ABCD et ABFE sont Des parallélogrammes.

Montrer que le quadrilatère EFCD est aussi un Parallélogramme



Proposition

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A du plan, il existe un unique point M du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

3 – Somme de deux vecteurs

Proposition1

Soit A et C deux points du plan, alors pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$
Cette relation est appelée : **relation de chasles**

Proposition2

Soit A, B, C et D quatre points du plan. On a :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ équivaut à ABCD est un parallélogramme

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A et B deux points du plan. On a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Applications

1) Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$. Simplifier les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$
2) Soit MAT un triangle. Construire le point H tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{MH}$

II – Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel non nul.
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini par :

- Si $k>0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction, le même sens et $\|k\vec{u}\|=k\|\vec{u}\|$
- Si $k<0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction, les sens opposés et $\|k\vec{u}\|=-k\|\vec{u}\|$

Conséquences

- Si $k=0$, on a $k\vec{u}=\vec{0}$. Donc $0.\vec{u}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $k\vec{u}=\vec{0}$. Donc $k.\vec{0}=\vec{0}$
- $1.\vec{u}=\vec{u}$ et $(-1).\vec{u}=-\vec{u}$

Exemple

Soit A et B deux points distincts du plan. Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$

Propriétés

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ et α *et* β deux réels. On a :

- $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
- $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$
- $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
- $\alpha\vec{u}=\vec{0}$ équivaut $\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Application

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$

2) En déduire $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$

III – Colinéarité de deux vecteurs – Alignement de trois points

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Propositions

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs sont colinéaires c-à-d $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires c-à-d $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Application

Soit ABCD un parallélogramme et I et J Deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$

1) Construire une figure

2) Montrer que : $\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

3) En déduire que les points C,I et J sont alignés

IV – Milieu d'un segment

Proposition1

Soit $[AB]$ un segment. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- I milieu du segment $[AB]$
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Proposition2

Soit $[AB]$ un segment et I milieu de $[AB]$.

I milieu du segment $[AB]$ si et seulement si, pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Proposition3

Soit ABC un triangle tel que I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Application

Soit ABC un triangle et I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $2\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$

Montrer que le point A est le milieu du segment $[CJ]$