1 – Equation du second degré

a – Définition et vocabulaire

Définition

- Toute équation de la forme $a x^2 + b x + c = 0$ où , est appelée **une équation du second degré à une seule inconnue.**
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **le discriminant de l'équation** $a x^2 + b x + c = 0$
- L'écriture $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée **la forme canonique du trinôme** $a x^2 + b x + c$

Remarques

- La fonction $x \mapsto a x^2 + b x + c$ est appelée **un trinôme de coefficients** a, b et c $(a \neq 0)$
- Si t est un réel tel que $at^2 + bt + c = 0$, alors t est appelée **une solution de l'équation** $a x^2 + b x + c = 0$ ou que t est **une racine du trinôme** $x \mapsto a x^2 + b x + c$

b – Résolution d'une équation du second degré

Proposition1

On considère l'équation du second degré $(E) :\ a x^2 + b x + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une seule solution $\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution

Remarque

Pour résoudre une équation du second degré, on peut utiliser la méthode du discriminant

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; 2) $3x^2 + 12x + 12 = 0$; 3) $x^2 - 3x + 7 = 0$

c – Somme et produit des racines d'un trinôme

Proposition2 (Somme et produit des deux solutions)

Si l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Remarques

- La deuxième solution x_2 d'une équation du second degré, connaissant une solution triviale x_1 est donnée par la formule $x_2 = \frac{c}{a x_1}$ ou $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$
- Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} x + y = S \\ x y = P \end{cases}$ où S et P sont des réels, On résoudra l'équation $(E) :\ t^2 - S t + P = 0$
  - Si $S^2 - 4P > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions t_1 et t_2 ainsi les solutions du système sont (t_1, t_2) *et* (t_2, t_1)

- Si $S^2-4P=0$, alors l'équation (E) admet une seule solution t_0 ainsi le système admet une seule solution (t_0,t_0)
- Si $S^2-4P<0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ ainsi le système n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

2 – Inéquations du second degré

a – Signe d'un trinôme

Proposition

On considère le trinôme ax^2+bx+c où $a\in\mathbb{R}^*$ et $(b,c)\in\mathbb{R}^2$ et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant .

❖ Si $\Delta>0$	x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
	ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a
❖ Si $\Delta=0$	x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
	ax^2+bx+c	Signe de a		0		Signe de a
❖ Si $\Delta<0$	x	$-\infty$				$+\infty$
	ax^2+bx+c			Signe de a		

b – Résolution d'une inéquation du second degré

Exemples

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $2x^2+3x-9\geq 0$

On pose $a=2,\ b=3$ et $c=-9$ et on calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=9-4\times2\times(-9)=81$

Donc le trinôme $2x^2+3x-9$ admet deux racines distinctes

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-9}{4}=-3 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+9}{4}=\frac{3}{2}$$

, et comme $a=2$ donc $a>0$ alors :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2+3x-9$		+	0	$-$	0	+	

D'où $S=\left]-\infty,-3\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2+10x+25\leq 0$

On pose $a=1,\ b=10$ et $c=25$ et on a : $\Delta=b^2-4ac=10^2-4\times1\times25=0$

Donc le trinôme $x^2+10x+25$ admet une seule racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{10}{2}=-5$. Et comme $a>0$, on a

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x^2+10x+25$		+	0	+	

D'où $S=\{-5\}$

3 – Equation du premier degré à deux inconnues

a – Définition

Définition

Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ s'appelle **une équation du premier degré à deux inconnues** x et y

Remarque

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite dans un repère orthogonal $(O;\vec{i}, \vec{j})$

b – Régionnement du plan

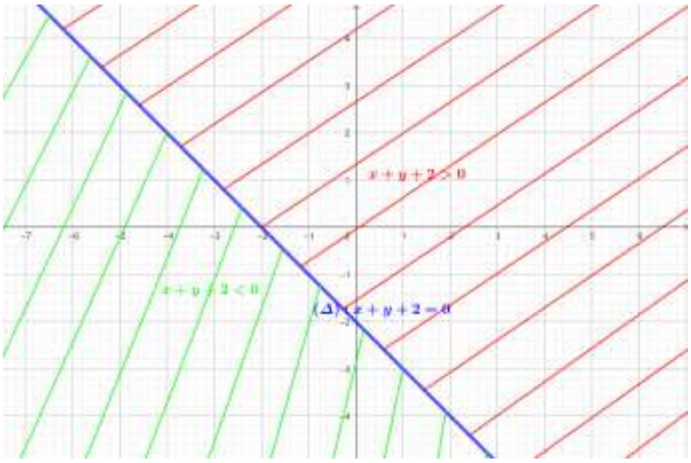
Proposition

Soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i}, \vec{j})$. Alors la droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts de frontière la droite (D)

- Un demi-plan qui est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $ax + by + c > 0$
- Et l'autre demi-plan est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $ax + by + c < 0$

Exemple

Notons (Δ) la droite d'équation $x + y + 2 = 0$



4 – Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' tels que $(a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$ et $(a' \neq 0 \text{ ou } b' \neq 0)$.

Si le couple de réels (u, v) est solution des deux équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$, on dit que

Le couple (u, v) est solution du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

a – Méthode de substitution

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ par la méthode de substitution

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 3(5 - 2y) - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ -7y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc $S=\{(3,1)\}$

Remarque

Il est préférable d'utiliser la méthode de substitution dans le cas où le coefficient de x ou de y est 1

b – Méthode de la combinaison linéaire

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=4\end{cases}$ par la méthode de combinaison linéaire.

$$\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=1 & \times 3\\3x+5y=4 & \times(-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+9y=3\\-6x-10y=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-y=-5\\2x+3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=5\\2x=-14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=5\\x=-7\end{cases}$$

Alors $S=\{(-7,5)\}$

c – Méthode des déterminants

Définition

Soient a, b, c, a', b' et c' tels que $(a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0)$ et $(a'\neq 0 \text{ ou } b'\neq 0)$.

.Le nombre réel $ab'-a'b$ est appelé **le déterminant du système** $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ et est noté $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}$

Et on a : $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

On pose, en général, que $\Delta_x=\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c$

Proposition

Soient a, b, c, a', b' et c' tels que $(a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0)$ et $(a'\neq 0 \text{ ou } b'\neq 0)$.

- Si $\Delta\neq 0$, alors le système $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ admet une unique solution $\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)$
- Si $\Delta=0$, on a :
  - Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$, alors le système $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ n'admet pas de solutions
  - Si $\Delta_x=\Delta_y=0$, alors le système $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ admet une infinité de solutions

Exemples

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système $(S):\begin{cases}3x-2y=5\\5x+4y=1\end{cases}$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 4\end{vmatrix}=12+10=22$, donc $\Delta\neq 0$ alors le système admet une unique solution

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}}{22}=\frac{20+2}{22}=1$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{22}=\frac{3-25}{22}=-1$. Alors $S=\{(1,-1)\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases}2x-3y=1\\ -4x+6y=3\end{cases}$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$ (On ne peut rien conclure)

Et on a : $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=6+9=15$. Donc $\Delta=0$ *et* $\Delta_x\neq 0$. Alors $S=\varnothing$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases}2x+3y=1\\ 4x+6y=2\end{cases}$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$ (on ne peut rien conclure)

Et on a : $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=6-6=0$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=4-4=0$. Alors $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$. Donc le système

$\begin{cases}2x-3y=1\\ -4x+6y=3\end{cases}$ admet une infinité de solutions et $S=\left\{\left(x,\frac{1-2x}{3}\right)/\ x\in\mathbb{R}\right\}$