1 – Définition

Définition

Soit a un nombre réel positif.

Le nombre réel positif dont le carré est a, s'appelle **la racine carrée du nombre** a. On le note $\sqrt{a}$.

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle **radical**

Remarques

Soit a un nombre réel positif.

- $b = a^2$ signifie $\sqrt{b} = a$
- $\sqrt{a}$ est un nombre positif $\left(\sqrt{a} \geq 0\right)$
- Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée

Exemples

- $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$
- $\sqrt{12,25} = 3,5$ car $3,5^2 = 12,25$
- $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ car $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$
- -10 ne possède pas de racine carrée

Règle

Pour tout nombre réel positif a, on a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$

Exemples

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$; $\sqrt{11^2} = 11$; $\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2}$

2- Résolution des équations $x^2 = a$ où $a > 0$

Proposition

Soit a un nombre réel.

- Si $a > 0$, les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont les nombres réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a une seule solution qui est 0
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle

Exemples

- Les solutions de l'équation $x^2 = 8$ sont les réels $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$, car on a $\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$ et $\left(-\sqrt{8}\right)^2 = 8$
- L'équation $x^2 = -7$ n'admet aucune solution réelle
- Les solutions de l'équation $x^2 = 0,49$ sont les réels $0,7$ et $-0,7$, car on a $\left(0,7\right)^2 = 0,49$ et $\left(-0,7\right)^2 = 0,49$

3 – Racine carrée et opérations

Proposition

Soient a et b deux nombres réels positifs. On a :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

- $\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}}{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

Exemples

- $\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- $\sqrt{7}\times\sqrt{3} = \sqrt{7\times3} = \sqrt{21}$
- $\sqrt{\dfrac{1}{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\times3}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}\times\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
- $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$

4 – Rendre rationnel le dénolinateur d'un quotient

Règle

Soient a et b deux nombres réels positifs. On a :

- $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$
- $\dfrac{a}{\sqrt{b}+c} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}-c\right)}{b-c^2}$
- $\dfrac{a}{\sqrt{b}-c} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}+c\right)}{b-c^2}$
- $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$
- $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$

Exemples

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$