I - Limites de fonctions (Rappels)

1 - Définitions:

Définition

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f et $a \in \overline{D}_f$ c'est-à-dire que a est une extrémité de l'un des intervalles de D_f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x>B\Rightarrow f(x)>A$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x>B\Rightarrow f(x)<-A\right]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x<-B\Rightarrow f(x)>A\right]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x<-B\Rightarrow f(x)<-A\right]$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x>B\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f);x<-B\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right]$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);|x-a|<\eta\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a<x<a+\eta\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a-\eta<x<a\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon\right]$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);|x-a|<\eta\Rightarrow f(x)>A\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a<x<a+\eta\Rightarrow f(x)>A\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a-\eta<x<a\Rightarrow f(x)>A\right]$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);|x-a|<\eta\Rightarrow f(x)<-A\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a<x<a+\eta\Rightarrow f(x)<-A\right]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left[(\forall A>0)(\exists \eta>0)(\forall x\in D_f);a-\eta<x<a\Rightarrow f(x)<-A\right]$

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$

En effet, Soit $A>0$, montrons qu'il existe $\eta>0$ *tel que si* $0<x<\eta$ *on ait* $\frac{1}{x}>A$.

Puisque $\frac{1}{x}>A$ et $x>0$ on a $x<\frac{1}{A}$. Donc si $0<x<\frac{1}{A}$ *on a* $\frac{1}{x}>A$. Il suffit de prendre $\eta=\frac{1}{A}$ et on a par définition : $(\forall A>0)\left(\exists\eta=\frac{1}{A}>0\right)(\forall x\in]0;+\infty[);0<x<\eta\Rightarrow\frac{1}{x}>A$. D'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

2 - Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont : $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$

3 - Quelques techniques de calcul de limites

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+5}{5x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5x^2}=\frac{3}{5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x^2-2x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{3x}=0$
* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x+2}{3x+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-5x+2=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$
* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+9}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{4x^2+9}+2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7}+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{9x^2+7}-3x}=0$
* $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{8}$
* $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-3}{x+5}=-\frac{1}{7}$

Théorème de comparaison

Soit I un intervalle et Δ une borne de I .

✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);f(x)<g(x)\\ \lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=-\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=-\infty$

✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);f(x)>g(x)\\ \lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=+\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=+\infty$

✯ $\left.\begin{array}{l}(\forall x\in I);h(x)<f(x)<g(x)\\ \lim\limits_{x\to\Delta}h(x)=\lim\limits_{x\to\Delta}g(x)=L\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=L$ (*Théorème des gendarmes*)

4 - Limites remarquables

* $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$
* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x>-\frac{\pi}{2}}}\tan x=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan x=+\infty$

II - Continuité d'une fonction en un point

1 - Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Dire que la fonction f est continue en a signifie que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

Exemple

montrer que la fonction f est continue en a dans les cas suivants :

* $\begin{cases}f(x)=\frac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1};\ x\neq1\\ f(1)=2\end{cases}$; $a=1$

* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x};\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $a=0$

2 - Continuité à droite et continuité à gauche d'un point

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;a+\alpha[$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$.
  Dire que la fonction f est continue à droite en a signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=f(a)$
- Soit g une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a]$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$.
  Dire que la fonction g est continue à gauche en a signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} g(x)=g(a)$

Exemples

Montrer que la fonction f est continue à droite en $a=0$ et que la fonction g est continue à gauche en $b=1$. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan(2x)}{\sin x};\ x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$; $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{|1-x|}\ ;\ x<1 \\ g(1)=1 \end{cases}$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en un réel a .
La fonction f est en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

Exemple

Montrer que la fonction f est continue en $a=0$ *et* $b=2$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan(2x)}{x};\ x<0 \\ f(x)=x^2-1\quad ;\ 0\le x\le 2 \\ f(x)=\sqrt{2x+5}\ ;\ x\ge 2 \end{cases}$$

3 - Prolongement par continuité d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction et a un réel tel que $a\notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\ (l\in\mathbb{R})$. La fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_f\cup\{a\}$ par : $\begin{cases} \tilde{f}(x)=f(x)\ ;\ x\in D_f \\ \tilde{f}(a)=l \end{cases}$ est continue en a. Cette fonction $\tilde{f}$ est appelée un prolongement par continuité de la fonction f en a.

Exemple

Montrer que la fonction f définie sur $]0;\pi[$ par : $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ admet un prolongement par continuité en 0. En effet on a :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

Donc la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 , la fonction g définie sur l'intervalle $[0;\pi[$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}\ ;\ 0<x<\pi \\ g(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

4 - Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit a et b deux réels quelconques.

- f est continue sur $]a;b[\Leftrightarrow f$ est continue en chaque élément de $]a;b[$
- f est continue sur $[a;b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à droite en } a\end{cases}$
- f est continue sur $]a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à gauche en } b\end{cases}$
- f est continue sur $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b\end{cases}$
- f est continue sur $]a;+\infty[\Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $]a;+\infty[$
- f est continue sur $[a;+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;+\infty[\\ f \text{ est continue à droite en } a\end{cases}$
- f est continue sur $]-\infty;b[\Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $]-\infty;b[$
- f est continue sur $]-\infty;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur }]-\infty;b[\\ f \text{ est continue à gauche en } b\end{cases}$
- f est continue sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ est continue en tout élément de $\mathbb{R}$

5 - Opérations sur les fonctions continues

Propriété 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a\in I$ et k un réel quelconque.

☆ Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f+g$, $f\times g$ et $k\times f$ sont continues en a

☆ Si f et g sont continues en a et $g(a)\neq0$ alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a

Propriété 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et k un réel quelconque.

☆ Si f et g sont continues sur l'intervalle I alors les fonctions $f+g$, $f\times g$ et $k\times f$ sont continues sur I

★ $\left.\begin{array}{l} Si\ f\ et\ g\ sont\ continues\ sur\ l'intervalle\ I \\ (\forall x \in I);\ g(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

6 - Continuité des fonctions usuelles

Propriété (admise)

- Toute fonction polynôme est continue sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^+$
- Les fonction cosinus et sinus sont continues sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple

Montrer que les fonction f et g sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et $[1;+\infty[$ telles que :

$f(x) = x^2 + 3x - 1 + \frac{1}{x^2+2} - \cos x$; $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x}}$.

En effet : on a $D_f = \mathbb{R}$ et comme les fonctions $x \mapsto x^2 + 3x - 1$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

alors la fonction f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de ses deux fonctions.

Et on a $D_g = [1;+\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \sqrt{x-1} + 2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[1;+\infty[$ et comme $(\forall x \in [1;+\infty[);\sqrt{x} \neq 0$;alors la fonction g est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de ses deux fonctions continues.

7 - Continuité de la composée de deux fonctions

Propriété1

- $\left.\begin{array}{l} Si\ f\ est\ continue\ en\ un\ réel\ a \\ Si\ \ g\ est\ continue\ en\ b = f(a) \end{array}\right\}$ $alors\ la\ fonction\ composée\ g \circ f\ est\ continue\ en\ a$
- $\left.\begin{array}{l} Si\ f\ est\ continue\ sur\ un\ intervalle\ I \\ Si\ g\ est\ continue\ sur\ un\ intervalle\ J \\ Si\ f(I) \subset J \end{array}\right\}$ $alors\ \ g \circ f\ est\ continue\ sur\ l'intervalle\ I$

Propriété 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ et $L \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r;a+r[$ et soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert J centré en L .

Tels que : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = L \\ g\ \text{est continue en}\ L \\ f(I) \subset J \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = L$

8 - Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété

Soit f une fonction définie sur D_f et $[a;b] \subset D_f$ et I un intervalle de D_f .

- *Si f est continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [m;M]$ est un segment*
- *Si f est continue sur I alors $f(I) = J$ est un intervalle*

Cas particulier :

Si la fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, le tableau suivant donne tous les cas possibles :

Intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

III - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est une fonction continue sur } [a;b] \\ k \text{ un réel compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array}\right\} \text{alors il existe un réel } c \text{ de } [a;b] \text{ tel que } f(c)=k$$

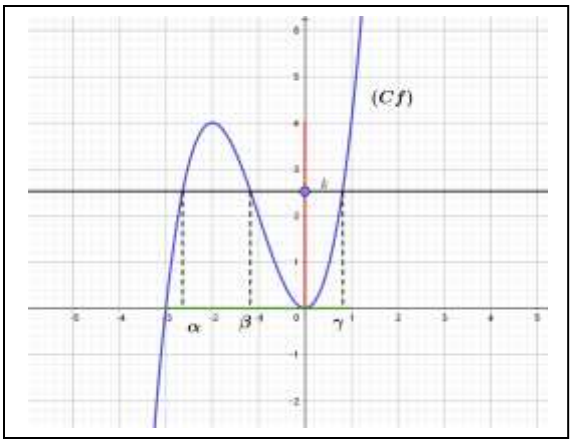
Théorème des valeurs intermédiaires et résolution des équations

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ une fonction continue sur } [a;b] \\ \bullet\ k \text{ un réel compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array}\right\} \text{alors } \left\{\begin{array}{l} l'\text{équation } f(x)=k \text{ admet au moins} \\ \text{une solution dans } [a;b] \end{array}\right.$$

Interprétation graphique du TVI

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors

La partie de la courbe représentative de f sur $[a;b]$ coupe la droite d'équation $y=k$ au moins en un point



Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+3x^2$

1/ Montrer que l'équation $f(x)=\frac{5}{2}$ admet au moins une Solution sur le segment $[-3;1]$

2/ En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y=\frac{5}{2}$ au moins en un point d'abscisse appartenant au segment $[-3;1]$

Corollaire 1

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ une fonction continue sur } [a;b] \\ \bullet\ f(a)\times f(b)<0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet au moins} \\ \text{une solution dans }]a:b[\end{array}\right.$

Remarque

Si une fonction est continue sur un intervalle et les images de ses extrémités sont de signe opposés Alors sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse appartient à cet intervalle

Corollaire 2

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ une fonction continue sur } [a;b] \\ \bullet\ f \text{ strictement monotone sur } [a;b] \\ \bullet\ f(a)\times f(b)<0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique} \\ \text{solution } \alpha \text{ dans }]a;b[\end{array}\right.$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x+1$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1;0[$.

En effet : f est continue et dérivable sur $[-1;0]$ *et* $f'(x)=3x^2+1$. Donc f est strictement croissante sur $[-1;0]$; en plus $f(-1)=-1$ *et* $f(0)=1$ donc $f(-1)\times f(0)<0$. D'où et d'après le corollaire du TVI , l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1;0[$.

Corollaire 3

Soit f et g deux fonctions définies sur $[a;b]$ et h la fonction définie sur $[a;b]$ par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ continues sur } [a;b] \\ h(a)\times h(b)<0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l}\text{l'équation } f(x)=g(x) \text{ admet au moins une solution} \\ \text{dans l'intervalle } [a;b]\end{array}\right.$

Corollaire 4

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et k un réel.

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a;+\infty[\\ \bullet\ k\in f([a;+\infty[) \end{array}\right\}$ alors l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;+\infty[$, si en plus f est strictement monotone sur $[a;+\infty[$ alors cette équation admet une unique solution α dans l'intervalle $[a;+\infty[$

Exemples

1/ $f(x)=\sin x$; $g(x)=2x-1$. Montrer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$

2/ $f(x)=x^3+2x-1$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Méthode d'encadrement par dichotomie des solutions d'une équation de la forme $f(x)=0$:

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un segment $[a;b]$ $(a<b)$ telle que $f(a)\times f(b)<0$. Donc d'après le corollaire du TVI il existe un unique réel $c\in]a;b[$ *tel que* $f(c)=0$.

On pose $m=\frac{a+b}{2}$, et on calcule $f(m)$.On a deux cas possibles :

- $f(a)\times f(m)<0$ et donc $c\in]a;m[$
- $f(m)\times f(b)<0$ donc $c\in]m;b[$

On réitère ce procédé jusqu'à ce qu'on arrive à l'encadrement demandé. Ce procédé s'intitule la dichotomie . Après n étapes on a un encadrement de c d'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$.

Exemple

Déterminer un encadrement à $6,25\times10^{-2}$ près de $\sqrt{2}$

Remarquons que $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2-2=0$.

On considère la fonction f définie sur $[1;2]$ par : $f(x)=x^2-2$ .La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$ et on a : $f(1)=-1$ *et* $f(2)=2$ donc $f(1)\times f(2)<0$ par conséquent l'équation

$f(x)=0$ admet une unique solution $c=\sqrt{2}$ dans $]1;2[$ .On a $f(1)<0$ *et* $f(2)>0$

a	b	m	$f(m)$	conclusion
1	*2*	*1,5*	$0,25>0$	$1<c<1,5$
1	*1,5*	*1,25*	$-0,4375<0$	$1,25<c<1,5$
1,25	*1,5*	*1,375*	$-0,109<0$	$1,375<c<1,5$
1,375	*1,5*	*1,4375*	$0,066>0$	$1,375<c<1,4375$

Enfin on $1,4375-1,375=0,0625=6,25\times10^{-2}$. Donc l'encadrement de c à $6,25\times10^{-2}$ est $1,375<c<1,4375$

IV - Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que .

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ continue sur } I\\ \bullet\ f \text{ strictement monotone sur } I\\ \bullet\ J=f(I)\end{array}\right\} \text{alors } f \text{ est une bijection de } I \text{ vers } J$$

Théorème et définition

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et J l'intervalle tel que $J = f(I)$.

- ✯ Il existe une unique fonction qui associe à chaque y de J un unique x de I tel que $f(x) = y$.
  Soit : $(\forall y \in J)(\exists! x \in I) : f(x) = y$
- ✯ Cette fonction est appelée la fonction réciproque de la fonction f et est notée f^{-1}.
- ✯ La fonction f^{-1} est définie par la relation : $\left.\begin{matrix} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

Propriétés de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque. Alors :

- $(\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x$
- $(\forall x \in f(I)); f \circ f^{-1}(x) = x$
- f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$
- f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et a la même monotonie que f
- La courbe représentative de f^{-1} et la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

1/ Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

2/ a/ Calculer $f(3)$ *et en déduire* $f^{-1}(1)$

b/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout* x *de l'intervalle* J

3/ Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1}

4/ Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives de f et de f^{-1}

Corrigé :

1/ on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ et $I =]2;+\infty[$

Puisque les fonctions $x \mapsto x-2$; $x \mapsto \sqrt{x-2}$ *sont continues sur l'intervalle* I *et* $(\forall x \in I); \sqrt{x-2} \neq 0$ *alors la fonction* f *est continue sur* I

De même la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(\forall x \in I); f'(x) = -\frac{1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$

Donc $(\forall x \in I); f'(x) < 0$ par suite la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

Par conséquent la fonction f est une bijection de I vers $f(I) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\right[=]0;+\infty[$

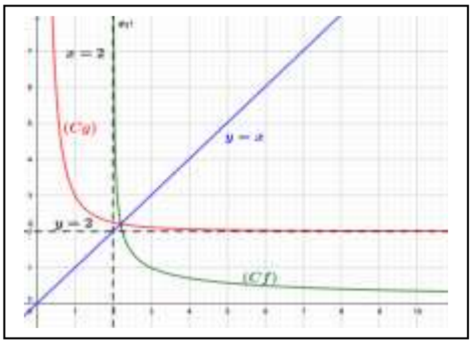
d'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J =]0;+\infty[$.

2/ a/ $f(3) = 1 \ donc \ f^{-1}(1) = 3$

$b\ /\ Soit\ x \in J\ et\ y \in I;\ on\ a\ y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y-2}} = x \Leftrightarrow y-2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{2x^2+1}{x^2}$$

$$Donc\ (\forall x \in J);\ f^{-1}(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$$



3/ Tableau de variation de f

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

Tableau de variation de f^{-1}

x	0	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 2

Puisque les fonctions f et f^{-1} ont le même sens de variation sur leurs intervalles de définition respectifs

V - Fonction racine n^{eme}

Théorème et définition

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

Donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ .Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la racine n^{eme} ou d'ordre n du réel positif .

Propriétés

Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Alors :

* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \ \ et \ \ \sqrt[n]{x^n} = x$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{+*}); \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \ \ et \ \ \sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$
* $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n\times m]{x^m} = \sqrt[n]{x} \ \ et \ \ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\times m]{x}$

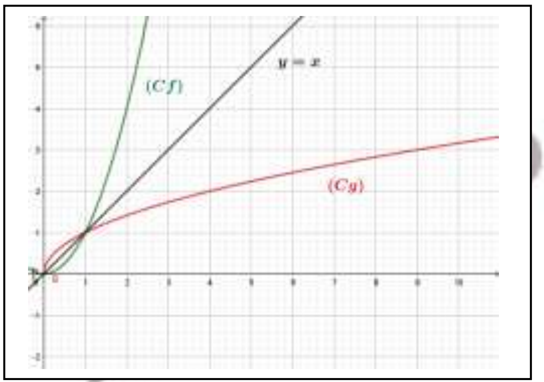
Théorème

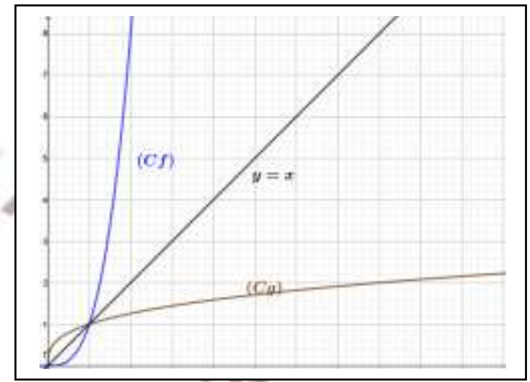
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \mapsto x^n$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Courbes des fonctions racine carrée et racine cubique

$f(x) = x^2$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$; $f^{-1} = g$ $\qquad$ $f(x) = x^3$ et $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ où $f^{-1} = g$





Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Définition

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]0;+\infty\right[$ et $r = \frac{p}{q}$.

La puissance rationnelle du nombre réel x d'exposant r est le nombre réel $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

En particulier : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Propriétés

- $(\forall r \in \mathbb{Q}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); x^r > 0$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{Z}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$
- $(\forall r \in \mathbb{Q}^*)(\forall r' \in \mathbb{Q}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$, $\left(x^r\right)^{r'} = \left(x^{r'}\right)^r = x^{r \times r'}$, $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ et $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $(\forall r \in \mathbb{Q}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\forall y \in \mathbb{R}^{+*}); x^r \times y^r = (xy)^r$ et $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$

VI - Fonction arctangente

Théorème et définition

Soit f la restriction de la fonction $x \to \tan x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Alors f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et par suite elle est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ .Donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction f^{-1} est appelée la fonction **arctangente** et est notée **Arctan**

Propriétés

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); Arc\tan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}); \tan(Arc\tan x) = x$
- $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right); Arc\tan(\tan x) = x$
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}); Arc\tan(a) = Arc\tan(b) \Leftrightarrow a = b$
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}); Arc\tan(a) < Arc\tan(b) \Leftrightarrow a < b$
- La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x = -\frac{\pi}{2}$

Courbe représentative de la fonction Arctan