Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3) On considère les suites (a_n) *et* (b_n) définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_n = u_{2n}$ *et* $b_n = u_{2n+1}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_n \leq b_n$

b) Montrer que les suites (a_n) *et* (b_n) sont adjacentes et déterminer leur limite

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$

b) Déterminer le plus petit entier naturel p pour que u_p soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près

Exercice 2

Soient (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{2}, \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = Arc\tan\left(\sqrt{\tan(u_n)}\right) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \frac{\pi}{6} \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$

2) Montrer que le suite (u_n) est convergente et préciser sa limite

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$

1) Montrer que $P_n(x)$ admet une racine unique α_n dans $]0,1]$

2) Montrer que : $(\forall x > 0),\ P_{n+1}(x) > P_n(x)$ puis déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 2\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} - 1 = 0$

b) Vérifier que : $\alpha_2 < 1$

c) Déduire que :

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n^n = 0$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 4

On considère les suites numériques (x_n) et (y_n) définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \; ; \; y_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \; x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \; ; \; y_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} + y_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (z_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), \; z_n = y_n - x_n$ est géométrique

2) Montrer que la suite (t_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), \; t_n = \dfrac{x_n + 2y_n}{3}$ est constante

3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 2 + \dfrac{a}{x}$ où $a \in]0,+\infty[$

1) a) Etudier les variations de la fonction f

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2) On considère les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,\alpha[\\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \; ; \quad v_n = u_{2n} \quad et \quad w_n = u_{2n+1} \; (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \; 0 < v_n < \alpha < w_n$

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante puis déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \; w_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{a}{2v_n + a}(w_n - v_n)$

d) Montrer qu'il existe un réel k indépendant de n, tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; w_{n+1} - v_{n+1} \leq k(w_n - v_n)$$

e) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes puis préciser leur limite commune