Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^2-x\right)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+2}-x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-x+3}-2x$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+x+1}+2x$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+x+1}+3x$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin(4x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)(\cos x-1)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\tan x}{\cos(2x)-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^3+x}\sin x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{3x^2-1}$

Exercice 2

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies par :

$f(x)=3x^4-2x^3+x-5$; $g(x)=\dfrac{2x+3}{2x^2-x-15}$; $h(x)=\sqrt{(x-2)\left(x^2-4x-5\right)}$; $i(x)=\sqrt{\dfrac{3x-4}{x(x+1)}}$

$j(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{(x-2)(x+1)}$; $l(x)=\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{6-x-x^2}}$.

Exercice 3

Etudier la continuité de la fonction f en x_0 dans les cas suivants :

1/ $f(x)=3x^2-5x+1$; $x_0=2$.

2/ $f(x)=\sqrt{3x-1}$; $x_0=3$.

3/ $f(x)=\sin x+\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

4/ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} ; & x>1 \\ f(1)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

5/ $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1}-2 ; & x\geq 0 \\ f(x)=-\dfrac{\sin x}{x} ; & x<0 \end{cases}$

6/ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1} ; & x>1 \\ f(1)=2 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}} ; & x<1 \end{cases}$

Exercice 4

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

1/ $f(x)=x^2+x-\dfrac{x}{x+3}+\cos x$; $I=\left]-3;+\infty\right[$

2/ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

3/ $\begin{cases} h(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2} ; & x>2 \\ h(x)=\dfrac{2x+11}{3} ; & x\leq 2 \end{cases}$; $I=\mathbb{R}$

4/ $\begin{cases} k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} ; & x\neq 2 \\ k(2)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-ax+3}{x^2+bx-b-1} ; & x<1 \\ f(x)=x-2 ; & x>1 \\ f(1)=c \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0=1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2-(1+a)x+1}{b(x^2-1)} ; |x|=1 \\ f(1)=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Déterminer les réels *a et b* pour que la fonction f soit continue en 1 et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Exercice 7

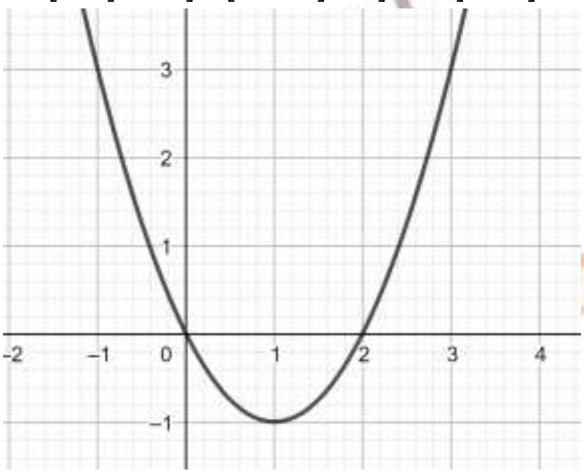
Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=x^2-2x$$

Dont la courbe représentative est donnée ci-dessous

Déterminer graphiquement les images par la fonction f des intervalles suivants :

$I=[-1;1]$; $J=]1;3[$; $K=]-1;3]$; $L=]-\infty;2]$; $M=]0;+\infty[$



Exercice 8

On considère la fonction g définie par :

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-3}$$

Déterminer les images par la fonction g des intervalles suivants :

$I=[0;3[$; $J=[4;+\infty[$; $K=]-\infty;3[$; $L=[0;2]$

Exercice 9

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^3+x-3$

1/ Montrer que l'équation $h(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$

2/ Justifier que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\alpha \in \left]1;\dfrac{3}{2}\right[$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1/ $f(x)=x^4+x^2+2x-1$; $I=[0;1]$

2/ $f(x)=2\sin x-x$; $I=\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

3/ $f(x)=x^2-5\sqrt{x}+1$; $I=[1;4]$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

1/ $f(x)=x^3+2x-2$; $I=[0;1]$

2/ $f(x)=x^4+2x-5$; $I=[1;+\infty[$

3/ $f(x)=1+2\sin x+3x$; $I=\left[-\frac{\pi}{6};\pi\right]$

Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

1/ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

2/ Montrer que : $1<\alpha<2$

3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 13

1/ Montrer que l'équation : $x^3+4x+9=5x^2+2$
Admet au moins une solution une solution dans $\mathbb{R}$

2/ Montrer que l'équation : $x=\cos x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;\pi]$

3/ Montrer que l'équation : $1+\sin x=2x$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

1/ Déterminer D_f

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in D_f);\ f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-2;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$

c/ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x}$$

1/ a/ Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathbb{R}^*$

b/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f'(x)=\frac{x^2+2}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$

a/ Montrer que h admet une fonction réciproque que l'on déterminera. J sur un intervalle h^{-1}

b/ Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$

c/ Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in J$.