I – Ensemble des nombres complexes

1 – Vocabulaires et notations

Théorème : (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que : $i^2 = -1$
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels. Autrement dit : $(\forall z \in \mathbb{C})\left(\exists!(a;b) \in \mathbb{R}^2\right); z = a+ib$

Définition

- L'écriture $z = a+ib$ où a et b sont deux réels, est appelée **l'écriture algébrique** ou **la forme algébrique** du nombre complexe z
- Le réel a est appelé **la partie réelle** du nombre complexe z et est noté **Re(z)**
- Le réel b est appelé **La partie imaginaire** du nombre complexe z et est noté **Im(z)**
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, le nombre complexe z est dit **imaginaire pur** (on note aussi que $z \in i\mathbb{R}$)

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C} = \left\{z = x+iy \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Proposition

Soit $z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$ deux nombres complexes tels que a, b, a' et b' sont des réels. Alors :

- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Exemples:

Déterminer les réels x et y tels que :

1) $x-2+i(2x+y-1)=0$; $2x+y-1+i(x+1-2y)=0$; $3-2x+5i=2-i(y+3)$;
$2x+3+i(y-5) \in \mathbb{R}$; $x^2-4+i(x^2-x-2) \in i\mathbb{R}$

2 - Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Proposition 1

Soit a, a', b, b' *et* k des nombres réels. Alors :

- $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$
- $(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
- $k(a+ib)=ka+ikb$
- $Si\ a+ib\neq 0(c-à-d : a\neq 0\ ou\ b\neq 0)\ alors\ \dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

Proposition 2

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

- $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1\ et\ i^{4n+3}=-i$
- $(z+z')\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z^k z'^{n-k}$ et $(z-z')\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^{n-k} z^k z'^{n-k}$
- $z^n - z'^n = (z-z')\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k z'^{n-k}\right)$ et $z^{2n+1}-z'^{2n+1}=(z+z')\left(\sum_{k=0}^{2n} z^k(-1)^{2n-k} z'^{2n-k}\right)$

Remarque:

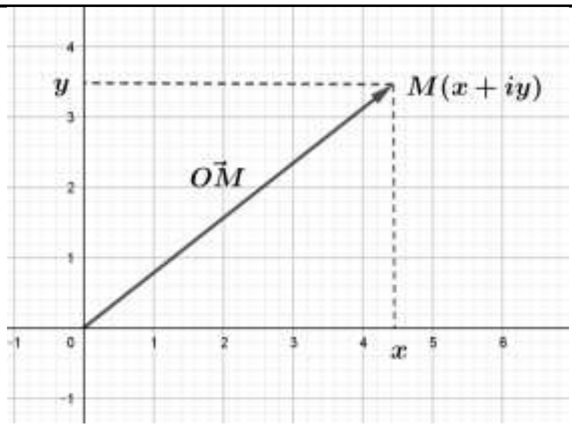
Tous les calculs que l'on peut effectuer dans $\mathbb{R}$, on peut les effectuer de la même manière dans $\mathbb{C}$, sauf ce qui est lié à la relation d'ordre qui ne s'applique pas dans $\mathbb{C}$

3 – Représentation géométrique d'un nombre complexe

Théorème et définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

- A chaque nombre complexe $z=a+ib$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, correspond un unique point $M(a,b)$ du plan. Le point $M(a,b)$ est appelé l'image de $z=a+ib$, on le en général $M(z)$
- A chaque point $M(a,b)$ du plan où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, correspond un unique nombre complexe $z=a+ib$, appelé l'affixe du point $M(a,b)$ et est noté z_M ou $aff(M)$



Vocabulaires:

★ Le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ est appelé **le plan complexe**

★ L'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels**

★ L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires**

Définition

Soit $A(z_A),\ B(z_B)\ et\ C(z_C)$ trois points du plan complexe et I le milieu du segment $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Alors :

- L'affixe du point I est le nombre complexe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- L'affixe du point G est le nombre complexe $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Proposition1

Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}\ et\ z_{\vec{v}}$ et $\alpha\ et\ \beta\ deux\ réels$.
Alors :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$
- $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \times aff(\vec{u}) + \beta \times aff(\vec{v})$

Proposition2

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A, z_B, z_C\ et\ z_D$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ABCD est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Les diagonales $[AC]\ et\ [BD]$ ont le même milieu
- $z_B - z_A = z_C - z_D$

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 3i\ et\ z_D = -2 + i$

1/ Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

2/ Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

3/ Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]\ et\ [AC]$. Déterminer les affixes de I et de J.

Proposition 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et soit $A(z_A),\ B(z_B),\ C(z_C)\ et\ D(z_D)$ des points du plan complexe distincts deux à deux. Alors :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \in \mathbb{R}$
- Les points $A,\ B\ et\ C$ sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$
- Les droites $(AB)\ et\ (CD)$ sont parallèles $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Exercice

1/ Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ les vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}} = 6+4i\ et\ z_{\vec{v}} = 3+2i$. Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$

2/ Soit $M(4i),\ N(4)\ et\ P(6-2i)$ trois points du plan complexe. Montrer qu'ils sont alignés.

Proposition 4

Soit $A(z_A),\ B(z_B), C(z_C)\ et\ D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $z_A \neq z_B\ et\ z_C \neq z_D$. Alors :

1/ Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\ est\ un\ imaginaire\ pur\right)$

2/ Les droites $(AB)\ et\ (CD)$ sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$

II – Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$

Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \overline{z} (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

Proposition 2:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $z \in \mathbb{R}$ (z est un réel) $\Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}^*$ (z est un imaginaire pur) $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Proposition 3:

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{(z+z')} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{(z \times z')} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- $\overline{(\lambda z)} = \lambda(\bar{z})$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, Alors :

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\bar{z})^n}$

Exercice 1

1/ Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3+2i$; $z_2 = 5i-2$; $z_3 = -3i+6$; $z_4 = (1-2i)^5$; $z_5 = \frac{3+5i}{1-2i}$; $z_6 = 3i(\sqrt{3}-2i) - 2(i-2)$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$a/\ (2+3i)z = 1-2i$; $b/\ 2iz+1+3i = 3z-i+2$; $c/\ 2z-(2-i)\bar{z}+1-2i = 0$; d/ $\frac{2z-i}{2-i\bar{z}} = 3+i$

e/ $(2z-3+iz+5i)((1+3i)z-2\bar{z}+2i) = 0$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1/ Déterminer et construire, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \bar{z} = 2$.

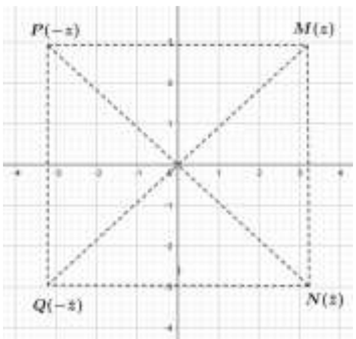
2/ Déterminer et construire, l'ensemble des points N d'affixe z tels que $z - \bar{z} = 4i$

3/ Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$. On pose

$Z = (a+bi)^n + (a-bi)^n$ *et* $Z' = (a+bi)^n - (a-bi)^n$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Z est un réel et que Z' est un imaginaire pur.

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. Soit $N(\bar{z})$, $P(-z)$ *et* $Q(-\bar{z})$, alors $M(z)$ et $N(\bar{z})$ d'une part et $P(-z)$ et $Q(-\bar{z})$ d'autre part sont symétriques par rapport à l'axe des réels



Proposition 4

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors:

- $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
- $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$

Exercice

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z^2 + 2z + 10$

1/ Vérifier que les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + i$ sont des racines de $P(z)$

2/ Déterminer toutes les racines de $P(z)$

III – Module d'un nombre complexe

Définition

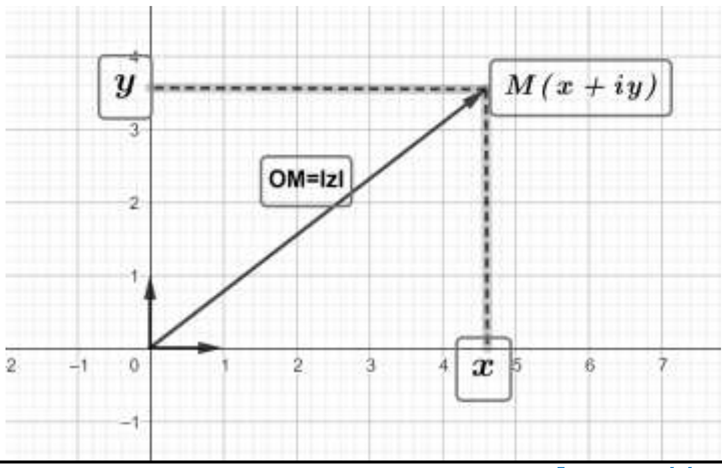
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que a et b sont des réels.
On appelle le module du nombre complexe z, le nombre réel positif noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proposition 1

- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| \in \mathbb{R}^+$
- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathcal{R}e(z)$ et si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathcal{R}e(z)$
- Si $z \in i\mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathcal{I}m(z)$ et si $z \in i\mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathcal{I}m(z)$
- Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels ; alors $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z \neq 0$. Alors $\frac{z'}{z} = \frac{z' \times \overline{z}}{z \times \overline{z}} = \frac{z' \times \overline{z}}{|z|^2}$

Interprétation graphique du module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe et soit $M(z)$ son image dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $OM = |z|$.



Proposition

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors :

* $OA = \|\overrightarrow{OA}\| = |z|$
* $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

Exercice1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1/ $|z|=2$; 2/ $|z-1+3i|=\frac{3}{2}$; 3/ $|\overline{z}+2-i|=3$; 4/ $|2z-4-3i|=4$; 5/ $|z|=|z-2|$;

6/ $|z-2+3i|=|z+1-2i|$; 7/ $|z+3-i|=|\overline{z}-2i|$; 8/ $|2-5i+3\overline{z}|=|2i+3-3z|$; 9/ $\frac{z-i}{z+1}\in i\mathbb{R}$

10/ $\frac{2z-i}{z+1}\in\mathbb{R}$

Exercice2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives

$z_A=-2+i$; $z_B=2+3i$; $z_C=-i$; $z_D=1-2\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$ et $z_E=-3i$

1/ Montrer que le triangle ABC est isocèle
2/ Montrer que le triangle BCD est équilatéral
3/ Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $Z=\frac{z_E-z_A}{z_B-z_A}$, et en déduire la nature du triangle ABE

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\mathrm{Re}(z)\le|\mathrm{Re}(z)|\le|z|$ et $\mathrm{Im}(z)\le|\mathrm{Im}(z)|\le|z|$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- $|\overline{z}|=|-z|=|z|=|iz|=\left|\frac{z}{i}\right|$
- $|z|^2=|\overline{z}^2|=z\times\overline{z}$ et $\overline{z}=\frac{|z|^2}{z}$
- $|z^n|=|z|^n$ $(n\in\mathbb{N})$
- Si $z\neq0$, on a : $|z^n|=|z|^n$ $(n\in\mathbb{N})$ et $\left|\frac{1}{z^n}\right|=\frac{1}{|z|^n}$ $(n\in\mathbb{N})$
- Si $z\neq0$, on a : $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$

- Si $|z|=1$, alors $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$
- Si $k\in\mathbb{R}^{+}$, on a : $|k\times z|=k\times|z|$ et $|-k\times z|=k\times|z|$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (l'inégalité triangulaire des nombres complexes)
- En général : $\left|\sum_{k=0}^{k=n} z_k\right|\leq\sum_{k=0}^{k=n}|z_k|$ pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe $z_0,\ z_1,\dots,\ z_n$

IV – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

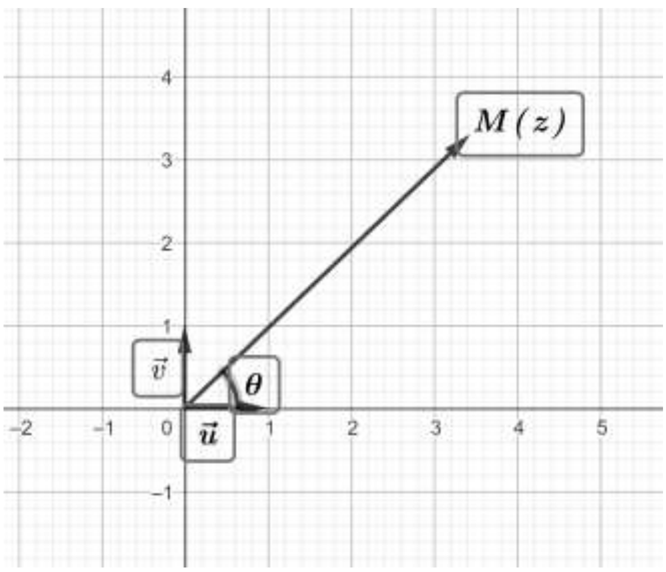
1 – Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ .Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.
On appelle argument de z et on note $arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Remarques

- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, alors $\theta+2k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$, est aussi une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.
- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, On note $arg(z)=\theta+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ ou $\arg(z)\equiv\theta\,[2\pi]$.
- En général, on prend $\theta\in\,]-\pi,\pi]$ (mais ce n'est pas obligatoire)
- Le nombre complexe 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument



Proposition 1

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tel que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, alors il existe au moins un réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ où $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

2 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ où θ est un argument de z.

L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z

On la note aussi : $z = [|z|, \theta]$

Définition (coordonnées polaires)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image le point M dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, tel que $r = OM$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$.

Le couple (r,θ) est appelé **le couple de coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe polaire $(O,\vec{u})$

Proposition 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r > 0$, alors $\begin{cases} |z| = r \\ \arg z \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Proposition 3

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercice

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ d'affixes z tels que :

1) $\operatorname{Im} z = 0$
2) $\operatorname{Re}(z) = 0$
3) $\begin{cases} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re}(z) > 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} \operatorname{Im} z < 0 \\ \operatorname{Re}(z) = 0 \end{cases}$

Méthodes pratiques

① Méthode 1:

Si $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1- On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2- On détermine $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

② **Méthode 2:**

- Si $\begin{cases} z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \lambda > 0 \end{cases}$ alors $z = [\lambda, \theta]$
- Si $\begin{cases} z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \lambda < 0 \end{cases}$ alors $z = [-\lambda, \theta + \pi]$

Exercice

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 + 2i$

$z_2 = -3 + i\sqrt{3}$

$z_3 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$

$z_4 = -21\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

Proposition 4

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$.

Alors :

❖ $\begin{cases} |\overline{z}| = |z| \\ \arg \overline{z} \equiv -\arg z [2\pi] \end{cases}$ et $\overline{z} = [r, -\theta]$

❖ $\begin{cases} |-z| = |z| \\ \arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi] \end{cases}$ et $-z = [r, \pi + \theta]$

❖ $\begin{cases} |z \times z'| = |z| \times |z'| \\ \arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi] \end{cases}$ et $z \times z' = [r \times r', \arg z + \arg z']$

- $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi] \end{cases}$ et $\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r}, -\arg z\right]$
- $\begin{cases} \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|} \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z\ [2\pi] \end{cases}$ et $\dfrac{z'}{z} = \left[\dfrac{r'}{r}, \theta' - \theta\right]$
- $\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n \times \arg z\ [2\pi] \end{cases}$ et $z^n = [r^n, n\times\theta]$ $(n \in \mathbb{N})$
- Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = [r_k, \theta_k]$ *où* $r_k > 0$ *et* $\theta_k \in \mathbb{R}$. Alors :

$\begin{cases} \left|\prod\limits_{k=1}^{k=n} z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{k=n} |z_k| \\ \arg\left(\prod\limits_{k=1}^{k=n} z_k\right) \equiv \sum\limits_{k=1}^{k=n} \arg(z_k)\ [2\pi] \end{cases}$ et $\prod\limits_{k=1}^{k=n} z_k = \left[\prod\limits_{k=1}^{k=n} r_k, \sum\limits_{k=1}^{k=n} \theta_k\right]$

Remarque

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z + z' \neq 0$. Alors l'égalité $\arg(z+z') = \arg z + \arg z'$ est fausse généralement

Exercice

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\sqrt{3} - i\right)(2+2i)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$z_1 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$z_3 = 2i\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

3 – Mesure d'angle de vecteurs et agument des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Proposition1

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- $\overline{(\vec{u},\vec{w})} \equiv \arg(z_{\vec{w}})\ [2\pi]$
- $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

- $\overline{(\vec{w},\vec{t})} \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right)[2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Proposition2

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- $\vec{w}$ et $\vec{t}$ colinéaires $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in \mathbb{R}$
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $\vec{w} \perp \vec{t} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in i\mathbb{R}$
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$

Proposition3

Soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
Alors :

- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$
- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$
- ABCD est un losange $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \end{cases}$
- ABCD est un carré $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \frac{z_D - z_A}{z_B - z_Z} = \left[1, \pm\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Proposition4

Soit A, B, et C des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, et z_C .
Alors :

- ❖ A, B, et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- ❖ ABC est un triangle isocèle en A $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$
- ❖ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| = |z_C - z_B|$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
- ❖ ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- ❖ ABC est un triangle rectangle et isocèle en A $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$
$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

V – Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

1 – Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ, autrement dit : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Exemples

- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Définition2

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ c-à-d : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée **l'écriture exponentielle** ou **la forme exponentielle** du nombre complexe z.

Proposition

Soit θ et θ' deux réels quelconques. Alors :

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta[2\pi]$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = \overline{\left(e^{i\theta}\right)} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $e^{i\alpha} + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta}{2}} \cos\left(\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- $e^{i\alpha} - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta+\pi}{2}} \sin\left(\dfrac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
- $1 - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

2 - Formules de Moivre et d'Euler

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$;[Formule de Moivre]
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$:[Formules d'Euler]

3 - Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

Proposition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- $\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{p=E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p} \cos^{n-2p}(\theta)\sin^{2p}(\theta)$
- $\sin(n\theta) = \sum_{p=0}^{p=E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^p C_n^{2p+1} \cos^{n-(2p+1)}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)$

Exemples

- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$
- $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ et $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

4 – linéarisation de $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$ $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Linéariser $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$ $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ revient à écrire ses expressions sous $\sum_{k\leq n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$

Exemples

1) Linéariser $\cos^2 x$

Pour cela on sait que $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, d'après les formules d'Euler

Donc $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4} = \dfrac{2\cos(2x)+2}{4} = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

D'où $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

2) Linéariser $\cos^3 x$

On a

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{i3x}}{8} = \frac{\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8}$$

$$= \frac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$$

D'où $\cos^3 x = \dfrac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$

3) Linéariser $\sin^4 x$

On a $\sin^4 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \dfrac{e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}}{16}$

$= \dfrac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$

D'où $\sin^4 x = \dfrac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$

VI – Racines nème d'un nombre complexe non nul

1 – Racines nème de l'unité

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On appelle **racine nème de l'unité** tout nombre complexe u tel que $u^n = 1$

L'ensemble des racines nème de l'unité est noté U_n c-à-d $U_n = \{u \in \mathbb{C} / u^n = 1\}$

Proposition1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

- Les racines nème de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$
- $\forall (z, z') \in U_n$, $z \times z' \in U_n$ et $\dfrac{z}{z'} \in U_n$
- $z \in U_n \Leftrightarrow \overline{z} \in U_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} \in U_n$

Exemples

1) Les racines carrées de l'unité sont les nombres complexes solutions de l'équation $z^2 = 1$. On a : $U_2 = \{-1, 1\}$

2) Les racines cubiques de l'unité sont les nombres complexes solutions de l'équation $z^3 = 1$. Déterminons U_3

On a :

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) \equiv 0[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ 3\arg z \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg z = \dfrac{2k\pi}{3}; k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \text{ où } k \in \{0,1,2\}$$

$$\Leftrightarrow z_0 = e^{i0} = 1;\ z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = (z_1)^2$$

On posera dorénavant $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et on a : $U_3=\{1,\ j,\ \bar{j}\}$

Proposition2

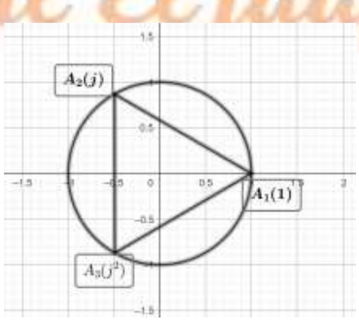
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_{n-1}$ les racines $n^{ème}$ de l'unité. Alors :

- $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}=0$ c-à-d $\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k=0$
- $\forall k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\},\ \bar{u}_k=u_{n-k}$
- $\forall k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\},\ u_k=u_1^k$
- Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les affixes, dans le plan complexe, des sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle trigonométrique et dont l'un des sommets est le point d'affixe. Ce polygone est symétrique par rapport à l'axe des réels

Exemple

On a : $1+j+j^2=0$ car les nombres complexes $1,\ j,\ et\ j^2$ sont les racines cubiques de l'unité

Soit $A_1(1),\ A_2(j)\ et\ A_3(j^2)$ les images des racines cubiques de l'unité. Alors ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique :



2 – Racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit a un nombre complexe.

On appelle racine $n^{ème}$ du nombre complexe a toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$\boldsymbol{z^n=a}$$

Proposition1

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $\boldsymbol{a=\rho e^{i\theta}}$ un nombre complexe non nul tel que $n\geq 2$, $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

Les **racines $n^{ème}$** du nombre complexe a sont les nombres complexes :

$$\boldsymbol{z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2kp}{n}\right)}}\ \ \textbf{où } \boldsymbol{k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}}\ \text{c-à-d}\ \boldsymbol{z_k=}\left[\sqrt[n]{\rho},\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]\ \text{où}$$

$\boldsymbol{k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}}$

Proposition2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

et soit $b \in \mathbb{C}^*$ tel que $b^n = a$. Alors :

Les racines nème du nombre complexe a sont les nombres complexes définis par

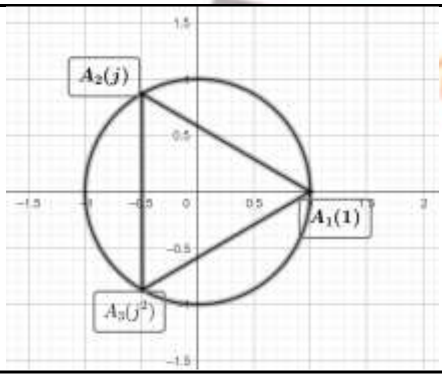
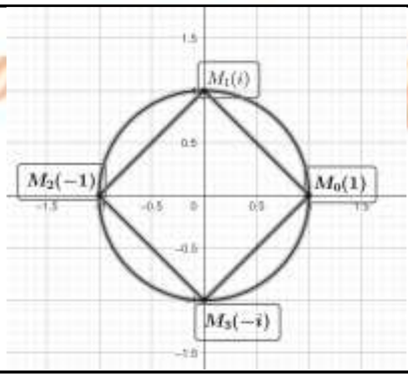
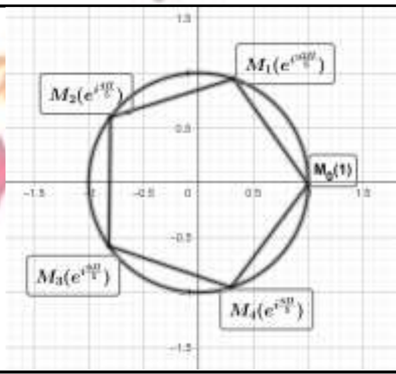
$z_k = b \times u_k$ où u_k sont les racines nème de l'unité et $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$

c-à-d $z_k = b \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$

Interprétation géométrique des racines nème d'un nombre complexe non nul

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul tels que $n \geq 2$. On note $M_k(z_k)$

Les images, dans le plan complexe, des racines nème de $a = \rho e^{i\theta}$ où $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$. Alors Les points $M_k(z_k)$ tels que $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$ passant par le point $M_1(1)$

		
$n=3$	$n=4$	$n=5$

VII – Equation du second degré à coefficients complexes

1 – Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition

Soit Δ un nombre complexe non nul.

1er cas : $\boldsymbol{\Delta = |\Delta| e^{i\theta}}$

Alors les racines carrées du nombre complexe Δ sont : $\delta_1 = \sqrt{|\Delta|}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et

$\delta_2 = -\sqrt{|\Delta|}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

2ème cas : $\boldsymbol{\Delta = a + ib}$ **où** $\boldsymbol{(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}}$

Alors $z^2=\Delta \Leftrightarrow (x+iy)^2=a+ib \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy=a+ib$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ xy=\dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\ xy=\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ xy=\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

D'où :

- Si $b>0$, les racines carrées de Δ sont :

$$\delta_1=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{et}$$

$$\delta_2=-\delta_1=-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

- Si $b<0$, les racines carrées de sont :

$$\delta_1=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{et}$$

$$\delta_2=-\delta_1=-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

Cas particuliers

- Si $\Delta\in\mathbb{R}_+^*$, alors ses racines carrées sont $\sqrt{\Delta}$ *et* $-\sqrt{\Delta}$
- Si $\Delta\in\mathbb{R}_-^*$, alors ses racines carrées sont $i\sqrt{-\Delta}$ *et* $-i\sqrt{-\Delta}$

- Si $\Delta \in i\mathbb{R}_+^*$, alors ses racines carrées sont $\sqrt{\frac{|\Delta|}{2}}(1+i)$ *et* $-\sqrt{\frac{|\Delta|}{2}}(1+i)$
- Si $\Delta \in i\mathbb{R}_-^*$, alors ses racines carrées sont $\sqrt{\frac{|\Delta|}{2}}(1-i)$ *et* $-\sqrt{\frac{|\Delta|}{2}}(1-i)$

Exercices

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- $\Delta = -5$
- $\Delta = 12$
- $\Delta = 16i$
- $\Delta = -9i$
- $\Delta = 3+4i$
- $\Delta = 1-i\sqrt{15}$

2 – Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition

Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ est une équation de la forme $az^2+bz+c=0$ où $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Le nombre complexe $\Delta = b^2-4ac$ est son discriminent dont δ est l'une de ses racines carrées

La forme canonique du trinôme az^2+bz+c est donnée par l'expression :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Proposition1

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. On note Δ le discriminent de l'équation $ax^2+bx+c=0$:

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions complexes distinctes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où $\delta^2 = \Delta$

  Et on a : $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$ et $z_1+z_2 = -\frac{b}{a}$ *et* $z_1\times z_2 = \frac{c}{a}$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution double $z_0 = -\frac{b}{2a}$

Et on : $az^2+bz+c=a\left(z-z_0\right)^2=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$

Corollaire

Soit a, b et c trois réels tels que $a\neq 0$. On note $\Delta=b^2-4ac$ le discriminent réel de l'équation (E): $ax^2+bx+c=0$ dont l'inconnue est z dans $\mathbb{C}$

- Si $\Delta>0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta=0$, l'équation (E) admet une solution double $z_0=-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta<0$, l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées
$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercices

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

* $z^2+(4+2i)z+6+8i=0$
* $(1+i)z^2-(1+7i)z+14+12i=0$

Proposition2

- Soit $(s,p)\in\mathbb{C}^2$; les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1+z_2=s \\ z_1\times z_2=p \end{cases}$
sont les solutions de l'équation $z^2-sz+p=0$
- Si z_1 et z_2 sont les solutions complexes de l'équation $az^2+bz+c=0$; alors si l'on connaît l'une d'elle on calcule facilement la deuxième en utilisant l'une des deux égalités $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ ou $z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

VIII- Transformations usuelles du plan et nombres complexes

1- Relations transformations du plan-Nombres complexes

Proposition

Soit $F:\begin{cases} P & \mapsto & P \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{cases}$ une transformation du plan P dans lui-même, alors on peut lui associer une unique application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$f:\begin{cases}\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}\\ z \mapsto z'=f(z)\end{cases}$ tel que pour tos les points $M(z)$ et $M'(z')$ du plan complexe on ait : $M'=F(M) \Leftrightarrow z'=f(z)$

On dit que f caractérise l'application F et que F représente f dans le plan complexe

2 – Transformations usuelles

a) La translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan dans lui-même définie par : $T_{\vec{u}}:\begin{cases}P \mapsto P\\ M(z) \mapsto M'(z')\end{cases}$ $tel\ que$ $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe u

L'écriture ou (formule) **complexe de la translation** $T_{\vec{u}}$ est : $\mathbf{z'=z+u}$

Effectivement ,on a :

$$M'(z')=T_{\vec{u}}(M(z)) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'})=aff(\vec{u})$$
$$\Leftrightarrow z'-z=u \Leftrightarrow z'=z+u$$

b – L'homothétie

Définition

Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'application définie par :

$$h:\begin{cases}P \mapsto P\\ M \mapsto M'\end{cases} \quad tel\ que\ \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$$

Proposition

Soit h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie h est la relation : $\mathbf{z'=\omega+e^{i\theta}(z-\omega)}$.

Effectivement, on a :

$$h(M(z))=M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{\Omega M})=k\,aff(\overrightarrow{\Omega M})$$
$$\Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega) \Leftrightarrow z'=\omega+k(z-\omega)$$

c – La rotation

Définition

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$

La rotation R de centre Ω et d'angle θ est l'application définie par :

$$R:\begin{cases} P \mapsto P \\ M \mapsto M' \end{cases} \quad tel\ que \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Proposition

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est la relation :

$$\mathbf{z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)}$$

Effectivement, on a :

$$R(M(z)) = M(z') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$$

d – Résumé sur les transformations usuelles

Proposition

Soit a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$, et soit F la transformation du plan d'écriture complexe est $z' = az + b$

- Si $\boldsymbol{a = 1}$
  Alors, F est la **translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$
  Alors, F est **l'homothétie** de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$

Alors, F est la **rotation** de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$

❖ Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$

Alors, F est la **composée** de la **rotation** R de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\arg(a)$ et **l'homothétie** H de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$.

On a : $F = R \circ H = H \circ R$