I – Dérivabilité d'un fonction

1 – Dérivabilité d'une fonction en un point

1.1 Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathbf{I}$.

Dire que la fonction f est dérivable en a signifie qu'il existe un réel L tel que

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$ ou $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L$ .Ce nombre L est appelé « le nombre dérivé de f en a » et est noté $f'(a)$

Remarque

f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ (où $f'(a)\in\mathbb{R}$)

Exemple

- la fonction sinus est dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et on a $\sin'(0)=1$
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$

1.2. Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction dérivable en un réel a, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

La droite (T) d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est la tangente à (C_f) au point $A(a;f(a))$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x)=\frac{3x+1}{x+2}$.

a/ Montrer que f est dérivable en $x_0=0$ et calculer $f'(0)$

b/ Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$

1.3. Approximation d'une fonction continue en un point

Définition

Soit f une fonction dérivable en a.

La fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ est une approximation affine de la fonction f au voisinage de a et on peut noter : $f(a+h)\simeq h\times f'(a)+f(a)$

Exemple

Déterminer une approximation affine de $\sqrt{9,04}$

Posons $f(x)=\sqrt{x}$, $a=9$ et $h=0,04$. On montre facilement que $f'(9)=\frac{1}{6}$;comme $f(a+h)\simeq f(a)+h\times f'(a)$ alors $f(9,04)=f(9+0,04)\simeq f(9)+0,04\times f'(9)$. D'où $\sqrt{9,04}\simeq 3,067$

1.4. Ecriture différentielle

Soit f une fonction dérivable en un réel x. Alors pour tout réel h tel que $x+h\in D_f$ on a :

$f(x+h)-f(x)=h\times f'(x)+h\times\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.

En posant $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ et $\Delta x=h$; on a : $\Delta y=f'(x)\times\Delta x+\varphi(\Delta x)\times\Delta x$, en plus si Δx est infiniment petit, cette écriture devient : $dy=f'(x)\times dx$ ou $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ qui s'appelle l'écriture différentielle de $f'(x)$

1.5. Relation entre continuité et dérivabilité en un point

Proposition

Toute fonction dérivable en un réel a, est continue en a

Remarques

1/ La réciproque de cette propriété n'est pas vraie en général.

En effet si $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, alors f est continue en $x_0=0$ mais elle n'est pas dérivable en $x_0=0$.

2/ Si une fonction n'est pas continue en un réel a, alors elle n'est pas dérivable en a.

2 – Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche en un point

Définition1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a;a+\alpha[$;où $a\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$.

Dire que f est dérivable à droite en a signifie qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L.$$

Le nombre réel L est appelé « le nombre dérivé de f à droite en a » et est noté $f_d'(a)$.

Définition2

Soit f une fonction dérivable à droite en a et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La demi-droite (T_d) d'équation $\begin{cases} y=f_d'(a)(x-a)+f(a) \\ x\geq a\end{cases}$ est appelée la demi – tangente à la courbe (C_f) à droite du point d'abscisse a

Définition3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha,a]$ où $a\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$.

Dire que la fonction f est dérivable à gauche en a signifie qu'il existe un nombre réel L' tel que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=L'$.

Le nombre réel L' est appelé « le nombre dérivé de f à gauche en a » et est noté $f_g'(a)$.

Définition4

Soit f une fonction dérivable à gauche en a $(a\in\mathbb{R})$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La demi-droite (T_g) d'équation $\begin{cases} y=f'(a)(x-a)+f(a) \\ x\leq a\end{cases}$ est une demi-tangente à la courbe (C_f) à gauche du point d'abscisse a.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a)=f'_g(a)\end{cases}$$

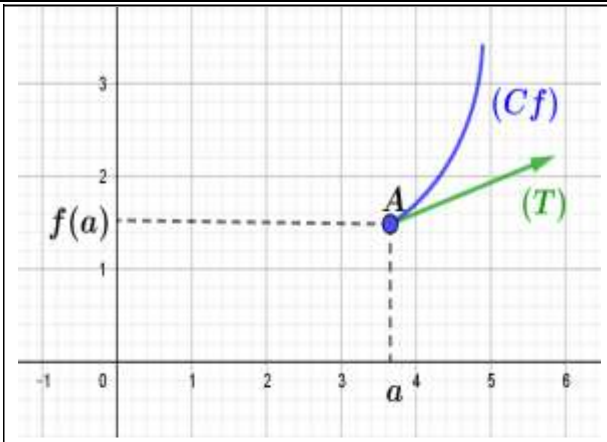
Exemples

Etudier la dérivabilité en a des fonctions suivantes et interpréter le résultat graphiquement.

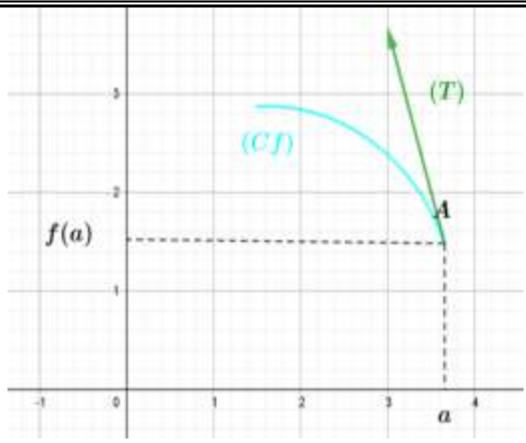
1/ $f(x)=|x-2|$; $a=2$. 2/ $f(x)=\sqrt{2+x}\cos(\pi x)$; $a=-1$. 3/ $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right); x\neq 0 \\ f(0)=0\end{cases}$; $a=0$

Interprétation graphique des nombres dérivés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

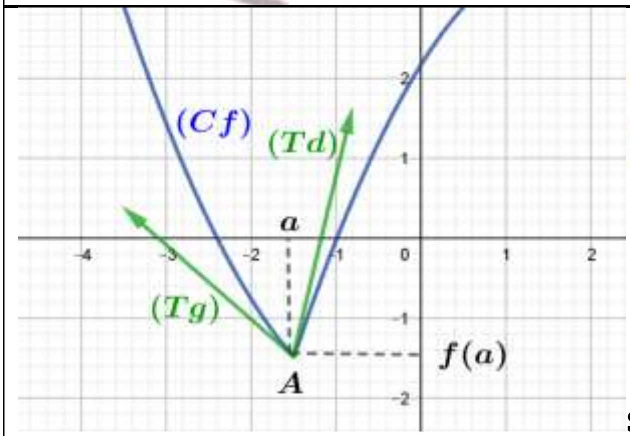


Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$, alors la courbe (C_f) admet une demi - tangente (T) à droite du point $A(a;f(a))$ d'équation : $\begin{cases} y=f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x\geq a \end{cases}$

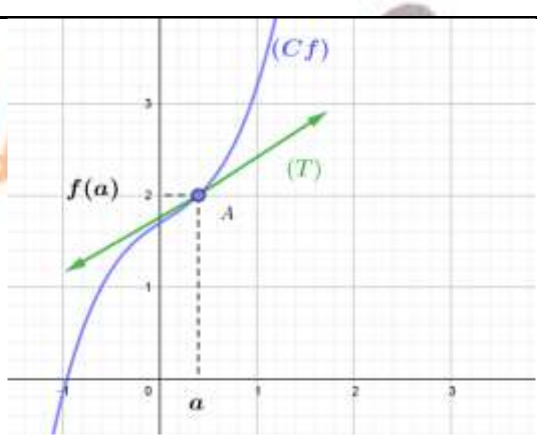


Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$,alors la courbe (C_f) admet une demi - tangente à gauche du point $A(a;f(a))$ d'équation :

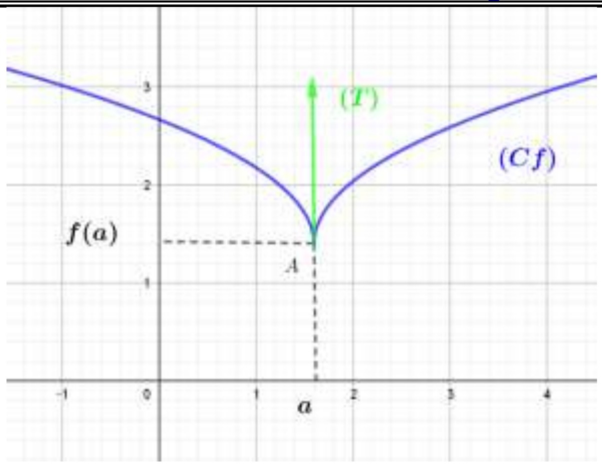
$$\begin{cases} y=f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x\leq a \end{cases}$$



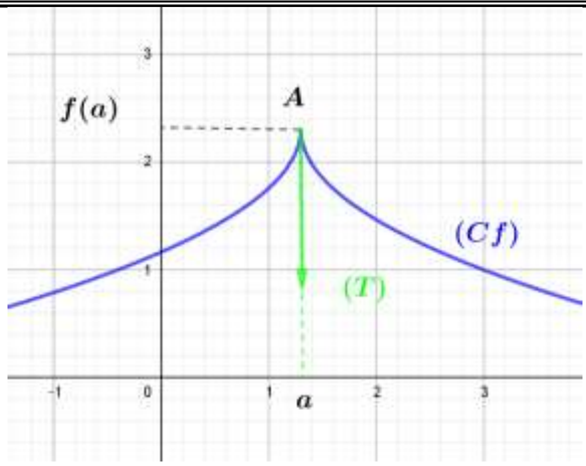
Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a) \\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a) \\ f'_d(a)\neq f'_g(a) \end{cases}$, alors la courbe (C_f) deux demi - tangentes au point $A(a;f(a))$. On dit que le point $A(a;f(a))$ est un point anguleux



Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a) \\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a) \\ f'_d(a)=f'_g(a) \end{cases}$, alors la courbe (C_f) admet une tangente (T) au point $A(a;f(a))$ d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$



Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$, alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le haut à droite du point $A(a;f(a))$ ou à gauche du point $A(a;f(a))$



Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$, Alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le bas à droite du point $A(a;f(a))$ ou à gauche du point $A(a;f(a))$

3 – Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition

* f dérivable sur $]a;b[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]a;b[$
* f dérivable sur $]a;+\infty[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]a;+\infty[$
* f dérivable sur $]-\infty;b[\Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $]-\infty;b[$
* f dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ dérivable en tout élément de $\mathbb{R}$
* f dérivable sur $[a;b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \end{cases}$
* f dérivable sur $[a;+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;+\infty[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \end{cases}$
* f dérivable sur $]a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$
* f dérivable sur $]-\infty;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]-\infty;b[\\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$
* f dérivable sur $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur }]a;b[\\ f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } b \end{cases}$

Proposition1 (Dérivabilité des fonctions usuelles sur un intervalle)

- Toute fonction polynôme est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur chaque intervalle de $]0;+\infty[$
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition2 (Opérations sur les fonctions dérivées)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a et b deux réels.

- $$\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } I \\ g \text{ dérivable sur } I \end{array}\right\} alors \left\{\begin{array}{l} f+g \text{ dérivable sur } I \\ f\times g \text{ dérivable sur } I \\ af+bg \text{ dérivable sur } I \end{array}\right.$$
- $$\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } I \\ g \text{ dérivable sur } I \\ (\forall x\in I); g(x)\neq 0 \end{array}\right\} alors \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{g} \text{ dérivable sur } I \\ \dfrac{f}{g} \text{ dérivable sur } I \end{array}\right.$$

Proposition3 (Domaine de définition et domaine de dérivabilité)

Soit f et g deux fonctions usuelles définies et dérivables respectivement sur D_f, $D_{f'}$, D_g *et* $D_{g'}$ et soit a et b deux réels .

h	D_h	$D_{h'}$
$a\times f+b\times g$	$D_f\cap D_g$	$D_{f'}\cap D_{g'}$
$\dfrac{f}{g}$	$D_f\cap D_g\cap\{x\in\mathbb{R}/\ g(x)\neq 0\}$	$D_{f'}\cap D_{g'}\cap\{x\in\mathbb{R}/\ g(x)\neq 0\}$
$\sqrt{f}$	$D_f\cap\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)\geq 0\}$	$D_{f'}\cap\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)> 0\}$

Exemples

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}-1}\ ;\ g(x)=\frac{x^2+x-2}{3x^2-x-2}\ ;\ h(x)=\sqrt{x^2-7x+6}$$

4 – Fonctions dérivées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x\mapsto f'(x)$ définie sur I , est appelée la fonction dérivée de la fonction f et est notée f'

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n>1)$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Règles de dérivation1

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v et dérivables respectivement sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$

f	D_f	f'	$D_{f'}$
$u+v$	$D_u \cap D_v$	$u'+v'$	$D_{u'} \cap D_{v'}$
λu	D_u	$\lambda u'$	$D_{u'}$
$u \times v$	$D_u \cap D_v$	$u' \times v + u \times v'$	$D_{u'} \cap D_{v'}$
$\frac{1}{v}$	$D_v \setminus \{x \in \mathbb{R} / v(x)=0\}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$D_{v'} \setminus \{x \in \mathbb{R} / v(x)=0\}$
$\frac{u}{v}$	$D_u \cap D_v \setminus \{x \in \mathbb{R} / v(x)=0\}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$D_{u'} \cap D_{v'} \setminus \{x \in \mathbb{R} / v(x)=0\}$

5 – Dérivée de la composée de deux fonctions

Proposition1

Soit f et g deux fonctions et a un réel tels que $a \in D_f$ et $f(a) \in D_g$.

$$\left.\begin{array}{l} * \ f \text{ dérivable en } a \\ * \ g \text{ dérivable en } f(a) \end{array}\right\} \text{alors} \left\{\begin{array}{l} \bullet \ g \circ f \text{ dérivable en } a \\ \bullet \ (g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \times f'(a) \end{array}\right.$$

Proposition2

Soit f et g deux fonctions et I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset D_f$ et $J \subset D_g$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ g \text{ dérivable sur } J \\ \bullet\ f(I) \subset J \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} *\ g \circ f \text{ dérivable sur } I \\ *\ (\forall x \in I);\ (g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \times f'(x) \end{array}\right.$$

Corollaire1

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et soit f et g les fonctions définies sur I par :

$f(x) = (u(x))^n$ et $g(x) = \dfrac{1}{(u(x))^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I); u(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I);\ f'(x) = n \times (u(x))^{n-1} \times u'(x) \end{array}\right.$

b/ Si $\left.\begin{array}{l} *\ u \text{ dérivable sur } I \\ *\ (\forall x \in I); u(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} *\ g \text{ dérivable sur } I \\ *\ (\forall x \in I); g'(x) = -\dfrac{n \times u'(x)}{(u(x))^{n+1}} \end{array}\right.$

Corollaire2

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que : $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$ et soit f la fonction définie sur I par : $(\forall x \in I);\ f(x) = \sqrt{u(x)}$

Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I); u(x) > 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I);\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \end{array}\right.$

Corollaire3

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Les deux fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \left\{\begin{array}{l} \bullet\ [\cos(ax+b)]' = -a \times \sin(ax+b) \\ \bullet\ [\sin(ax+b)]' = a \times \cos(ax+b) \end{array}\right.$$

Exercice

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer leurs fonctions dérivées :

$f(x) = \sqrt{2x+3}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$; $i(x) = (2x+5)^4$; $j(x) = \dfrac{6}{(3x-2)^3}$; $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x} - 3}$;

$k(x) = 3\sin(\pi x) - 2\cos(\pi x)$

Règles de dérivabilité 2

Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur D_u et D_v et dérivables respectivement sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$u \circ v(x)$	$D_v \cap \{x \in \mathbb{R} / v(x) \in D_u\}$	$u'[v(x)] \times v'(x)$	$D_{v'} \cap \{x \in \mathbb{R} / v(x) \in D_{v'}\}$
$[v(x)]^n$	D_v	$n \times [v(x)]^{n-1} \times v'(x)$	$D_{v'}$
$\dfrac{1}{[v(x)]^n}$	$D_v \cap \{x \in \mathbb{R} / v(x) \neq 0\}$	$-\dfrac{n \times v'(x)}{[v(x)]^{n+1}}$	$D_{v'} \cap \{x \in \mathbb{R} / v(x) \neq 0\}$
$\sqrt{u(x)}$	$D_u \cap \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$D_{u'} \cap \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$
$u(ax+b)$	$\{x \in \mathbb{R} / ax+b \in D_u\}$	$a \times u'(ax+b)$	$\{x \in \mathbb{R} / ax+b \in D_{u'}\}$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a \times cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a \times sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

6 – Dérivée de la fonction réciproque

Proposition1

Soit f une fonction qui admet une fonction réciproque f^{-1} définie l'intervalle $J = f(I)$ et $a \in I$ et $b = f(a)$. On a :

- $Si \left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable en } a \\ \bullet\ f'(a) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1} \text{ dérivable en } b \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} \end{array}\right.$
- $Si \left.\begin{array}{l} *\ f \text{ dérivable sur } I \\ *\ (\forall x \in I);\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} *\ f^{-1} \text{ dérivable sur } J = f(I) \\ *\ (\forall x \in J);\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \end{array}\right.$

Proposition2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{Q}^*$ et u une fonction définie sur un intervalle I

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*});\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{\sqrt[n]{x^{n-1}}}{n}$
- Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I);u(x) > 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ la fonction } x \mapsto \sqrt[n]{u(x)} \text{ estdérivable sur } I \\ \bullet\ (\forall x \in I);\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}} \times u'(x)}{n} \end{array}\right.$

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*});(x^r)' = r \times x^{r-1}$
- Si $\left.\begin{array}{l} * \ u \text{ dérivable sur } I \\ * \ (\forall x \in I); u(x) > 0 \end{array}\right\}$ alors $\left\{\begin{array}{l} * \text{ La fonction } x \mapsto [u(x)]^r \text{ est dérivable sur } I \\ * \ (\forall x \in I); \left[\{u(x)\}^r\right]' = r \times [u(x)]^{r-1} \times u'(x) \end{array}\right.$

Règles de dérivation3

Soit u une fonction définie sur D_u et dérivable sur $D_{u'}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{p}{q} \times x^{\frac{p}{q}-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt[q]{[u(x)]^p} = [u(x)]^{\frac{p}{q}}$	$Si\ p > 0; D_u \cap \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq 0\}$ $Si\ p < 0; D_u \cap \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$	$\frac{p}{q} \times [u(x)]^{\frac{p}{q}-1} \times u'(x)$	$D_{u'} \cap \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$

II – Applications de la dérivation

1- Dérivation et monotonie d'une fonction

Proposition1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

✯ f est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I); f'(x) = 0$

✯ f est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I); f'(x) \geq 0$

✯ f est une fonction décroissante sur I $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0$

✯ ♦ $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$
♦ L'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions dans I
} alors la fonction f est strictement croissante sur I

✯ ♠ $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0$
♠ L'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions dans I
} alors la fonction f est strictement décroissante sur I

Exercice

Etudier les variations des fonctions suivantes et dresser leur tableau de variation :

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 \ ; \ g(x) = \frac{3x-2}{2x+1} \ ; \ h(x) = \frac{x^2+x+1}{2x+1} \ ; \ k(x) = \sqrt{1+x-x^2} \ ; \ \begin{cases} u(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{4}; x \geq 1 \\ u(x) = \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}; x < 1 \end{cases}$$

2 – Dérivation et extémums d'une fonction

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extrémum en a, alors $f'(a)=0$
- $\left.\begin{array}{l} * \; f'(a)=0 \\ * \text{ la fonction } f' \text{ change de signe en } a \text{ sur } I \end{array}\right\}$ alors la fonction f admet un extrémum en a sur I

Remarque

Si $f'(a)=0$, on ne peut pas conclure que $f(a)$ est un extrémum de f. En effet si $f(x)=(x-1)^3+3$ on a $f'(x)=3(x-1)^2$ et $f'(1)=0$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a : $f(0)<f(1)<f(2)$ donc $f(1)=3$ n'est pas un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

3 – Dérivation d'une fonction et convexité

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Dire que la fonction f ou que la courbe (C_f) est convexe sur I signifie que (C_f) est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f ou que la courbe (C_f) est concave sur I signifie que (C_f) est située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes .

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f ou sa courbe (C_f) est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction drivée f' est croissante sur I.
- La fonction f ou sa courbe (C_f) est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée f' est dérivable sur I , on note sa dérivée seconde par f''.

- La fonction f ou sa courbe (C_f) est convexe sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f''(x) \geq 0$
- La fonction f ou sa courbe (C_f) est concave sur I $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f''(x) \leq 0$

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

Dire qu'un point A de la courbe (C_f) est un point d'inflexion signifie que la courbe (C_f) traverse sa tangente en ce point .

Conséquences

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur I et $a \in I$

- Si A est un point d'inflexion à la courbe (C_f), alors la courbe (C_f) change de concavité en A.
- Si la fonction dérivée f' change de sens de variation en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en a en changeant de signe en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la fonction dérivée f' s'annule en a sans changer de signe en a, alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Etudier la dérivabilité à droite en $x_0=1$ et à gauche en $x_1=-1$ et interpréter ses résultats graphiquement.

2/ a/ Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$

b/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

3/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\right); f''(x)=\dfrac{(2x^2-2x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

b/ Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

c/ Etudier la concavité de la courbe (C_f)