I – Ensemble des nombres complexes

1 – Vocabulaires et notations

Théorème : (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que : $i^2 = -1$
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication, qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels.
  Autrement dit : $(\forall z \in \mathbb{C})\left(\exists!(a;b) \in \mathbb{R}^2\right); z = a+ib$

Définition

- L'écriture $z = a+ib$ où a et b sont deux réels, est appelée **l'écriture algébrique** ou **la forme algébrique** du nombre complexe z
- Le réel a est appelé **la partie réelle** du nombre complexe z et est noté **Re(z)**
- Le réel b est appelé **La partie imaginaire** du nombre complexe z et est noté **Im(z)**
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ *et* $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, le nombre complexe z est dit **imaginaire pur** (on note aussi que $z \in i\mathbb{R}$)

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C} = \left\{ z = x+iy \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Proposition

Soit $z = a+bi$ *et* $z' = a'+b'i$ deux nombres complexes tels que a, b, a' *et* b' sont des réels. Alors :

- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Exemples:

Déterminer les réels x *et* y tels que :

1) $x-2+i(2x+y-1) = 0$; $2x+y-1+i(x+1-2y) = 0$; $3-2x+5i = 2-i(y+3)$;
$2x+3+i(y-5) \in \mathbb{R}$; $x^2-4+i(x^2-x-2) \in i\mathbb{R}$

2 - Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Proposition 1

Soit a, a', b, b' et k des nombres réels. Alors :

- $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$
- $(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
- $k(a+ib)=ka+ikb$
- $Si\ a+ib\neq 0 (c-à-d : a\neq 0\ ou\ b\neq 0)\ alors\ \frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Proposition 2

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

- $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1\ et\ i^{4n+3}=-i$
- $z^3-z'^3=(z-z')(z^2+zz'+z'^2)$ et $z^3+z'^3=(z+z')(z^2-zz'+z'^2)$

Remarque:

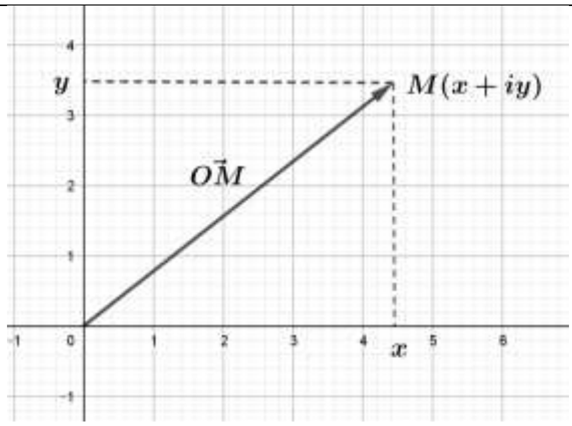
Tous les calculs que l'on peut effectuer dans $\mathbb{R}$, on peut les effectuer de la même manière dans $\mathbb{C}$, sauf ce qui est lié à la relation d'ordre qui ne s'applique pas dans $\mathbb{C}$

3 – Représentation géométrique d'un nombre complexe

Théorème et définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

- A chaque nombre complexe $z=a+ib$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, correspond un unique point $M(a,b)$ du plan. Le point $M(a,b)$ est appelé l'image de $z=a+ib$, on le en général $M(z)$
- A chaque point $M(a,b)$ du plan où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, correspond un unique nombre complexe $z=a+ib$, appelé l'affixe du point $M(a,b)$ et est noté z_M ou $aff(M)$



Vocabulaires:

★ Le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ est appelé **le plan complexe**

★ L'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels**

★ L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires**

Définition

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe et I le milieu du segment $[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Alors :

- L'affixe du point I est le nombre complexe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- L'affixe du point G est le nombre complexe $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Proposition1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et α et β $deux\ réels$. Alors :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$
- $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \times aff(\vec{u}) + \beta \times aff(\vec{v})$

Proposition2

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ABCD est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu
- $z_B - z_A = z_C - z_D$

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 3i$ et $z_D = -2 + i$

1/ Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

2/ Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

3/ Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AC]$. Déterminer les affixes de I et de J.

Proposition 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points du plan complexe distincts deux à deux. Alors :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \in \mathbb{R}$
- Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Exercice

1/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}} = 6+4i$ et $z_{\vec{v}} = 3+2i$. Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2/ Soit $M(4i)$, $N(4)$ et $P(6-2i)$ trois points du plan complexe. Montrer qu'ils sont alignés.

Proposition 4

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.
Alors :

1/ Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \textit{ est un imaginaire pur} \right)$

2/ Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

II – Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$

Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \overline{z} (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$

Proposition 2:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

- $z \in \mathbb{R}$ (z est un réel) $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}^*$ (z est un imaginaire pur) $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Proposition 3:

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, Alors :

- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

- $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$
- $\overline{\left(\lambda z\right)} = \lambda\left(\overline{z}\right)$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{\left(\overline{z}\right)^n}$

Exercice 1

1/ Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3+2i\,;\ z_2 = 5i-2\,;\ z_3 = -3i+6\,;\ z_4 = (1-2i)^5\,;\ z_5 = \dfrac{3+5i}{1-2i}\,;\ z_6 = 3i\left(\sqrt{3}-2i\right)-2(i-2)$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$a/\ (2+3i)z = 1-2i$; $b/\ 2iz+1+3i = 3z-i+2$; $c/\ 2z-(2-i)\overline{z}+1-2i = 0$; d/ $\dfrac{2z-i}{2-i\overline{z}} = 3+i$

e/ $(2z-3+iz+5i)\left((1+3i)z-2\overline{z}+2i\right) = 0$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

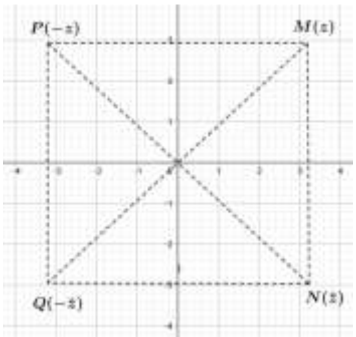
1/ Déterminer et construire, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z+\overline{z} = 2$.

2/ Déterminer et construire, l'ensemble des points N d'affixe z tels que $z-\overline{z} = 4i$

3/ Soit a et b deux réels tels que $b \neq 0$. On pose $Z = (a+bi)^n + (a-bi)^n$ et $Z' = (a+bi)^n - (a-bi)^n$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Z est un réel et que Z' est un imaginaire pur.

Remarque

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. Soit $N(\overline{z}),\ P(-z)$ et $Q(-\overline{z})$, alors $M(z)$ et $N(\overline{z})$ d'une part et $P(-z)$ et $Q(-\overline{z})$ d'autre part sont symétriques par rapport à l'axe des réels



Proposition 4

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors:

- $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
- $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\alpha}) = 0$

Exercice

Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z^2 + 2z + 10$

1/ Vérifier que les nombres complexes $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 2+i$ sont des racines de $P(z)$

2/ Déterminer toutes les racines de $P(z)$

III – Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que a et b sont des réels.

On appelle le module du nombre complexe z, le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :

$|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proposition 1

- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| \in \mathbb{R}^+$
- $(\forall z \in \mathbb{C}); |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- Si $z \in \mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathscr{R}e(z)$ et si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathscr{R}e(z)$
- Si $z \in i\mathbb{R}^+$ alors $|z| = \mathscr{I}m(z)$ et si $z \in i\mathbb{R}^-$ alors $|z| = -\mathscr{I}m(z)$
- Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels ; alors $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z \neq 0$. Alors $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z' \times \overline{z}}{z \times \overline{z}} = \dfrac{z' \times \overline{z}}{|z|^2}$

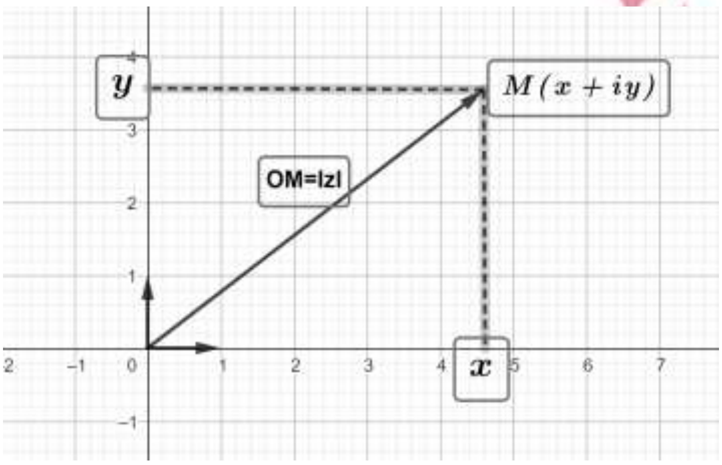
Interprétation graphique du module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe

et soit $M(z)$ son image dans un repère orthonormé

direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

donc $OM = |z|$.



Proposition

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Alors :

* $OA = \|\overrightarrow{OA}\| = |z|$
* $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

Exercice1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1/ $|z|=2$; 2/ $|z-1+3i|=\frac{3}{2}$; 3/ $|\overline{z}+2-i|=3$; 4/ $|2z-4-3i|=4$; 5/ $|z|=|z-2|$;

6/ $|z-2+3i|=|z+1-2i|$; 7/ $|z+3-i|=|\overline{z}-2i|$; 8/ $|2-5i+3\overline{z}|=|2i+3-3z|$; 9/ $\frac{z-i}{z+1}\in i\mathbb{R}$

10/ $\frac{2z-i}{z+1}\in\mathbb{R}$

Exercice2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B , C et D d'affixes respectives $z_A=-2+i$; $z_B=2+3i$; $z_C=-i$; $z_D=1-2\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$ et $z_E=-3i$

1/ Montrer que le triangle ABC est isocèle

2/ Montrer que le triangle BCD est équilatéral

3/ Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $Z=\frac{z_E-z_A}{z_B-z_A}$, et en déduire la nature du triangle ABE

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\mathrm{Re}(z)\le|\mathrm{Re}(z)|\le|z|$ et $\mathrm{Im}(z)\le|\mathrm{Im}(z)|\le|z|$
- $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- $|\overline{z}|=|-z|=|z|=|i\,z|=\left|\frac{z}{i}\right|$
- $|z|^2=|\overline{z}^2|=z\times\overline{z}$ et $\overline{z}=\frac{|z|^2}{z}$
- $|z^n|=|z|^n$ $(n\in\mathbb{N})$
- Si $z\ne0$, on a : $|z^n|=|z|^n$ $(n\in\mathbb{N})$ et $\left|\frac{1}{z^n}\right|=\frac{1}{|z|^n}$ $(n\in\mathbb{N})$
- Si $z\ne0$, on a : $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$
- Si $|z|=1$, alors $\overline{z}=\frac{1}{z}$
- $Si\ k\in\mathbb{R}^+$, on a : $|k\times z|=k\times|z|\ et\ |-k\times z|=k\times|z|$
- $|z+z'|\le|z|+|z'|$ (l'inégalité triangulaire des nombres complexes)
- En général : $\left|\sum_{k=0}^{k=n}z_k\right|\le\sum_{k=0}^{k=n}|z_k|$ pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe $z_0,\ z_1,\ldots,\ z_n$

IV – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1 – Argument d'un nombre complexe non nul

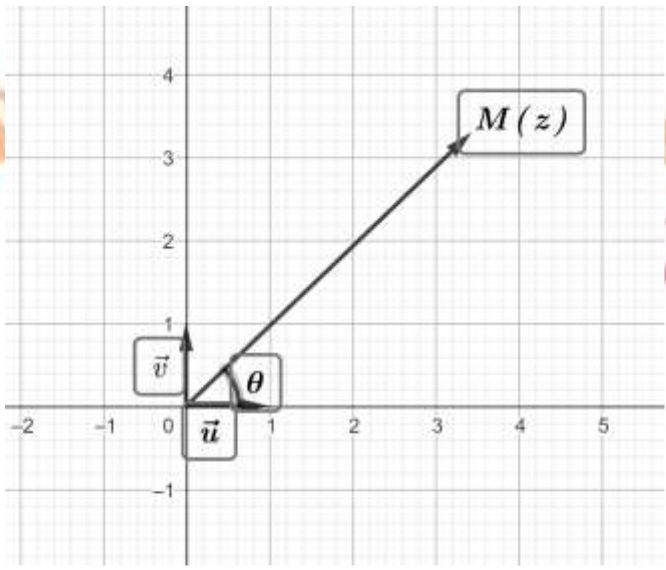
Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ .Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z et on note $arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Remarques

- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, alors $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est aussi une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.
- Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$, On note $arg(z) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.
- En général, on prend $\theta \in]-\pi,\pi]$ (mais ce n'est pas obligatoire)
- Le nombre complexe 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument



Proposition 1

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tel que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, alors il existe au moins un réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ où $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

2 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ où θ est un argument de z.

L'écriture $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z

On la note aussi : $z=[|z|,\theta]$

Définition (coordonnées polaires)

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ d'image le point M dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, tel que $r=OM$ et $\arg z\equiv\theta[2\pi]$.

Le couple (r,θ) est appelé **le couple de coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe polaire $(O,\vec{u})$

Proposition 1

Soit $z\in\mathbb{C}^*$ tel que $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ où $r>0$, alors $\begin{cases}|z|=r\\ \arg z\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$

Proposition 2

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Alors :

- $z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg z\equiv0[\pi]\Leftrightarrow\arg z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- $z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg z\equiv0[2\pi]\Leftrightarrow\arg z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg z\equiv\pi[2\pi]\Leftrightarrow\arg z=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- $z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\arg z\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- $z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\arg z\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow\arg z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- $z\in i\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow\arg z\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow\arg z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ d'affixes z tels que :

1) $\operatorname{Im} z=0$
2) $\operatorname{Re}(z)=0$
3) $\begin{cases}\operatorname{Im} z=0\\ \operatorname{Re}(z)>0\end{cases}$
4) $\begin{cases}\operatorname{Im} z<0\\ \operatorname{Re}(z)=0\end{cases}$

Méthodes pratiques

① Méthode 1:

Si $z=a+ib$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

1- On calcule $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

2- On détermine $\theta\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

② Méthode 2:

- Si $\begin{cases}z=\lambda(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \lambda>0\end{cases}$ alors $z=[\lambda,\theta]$
- Si $\begin{cases}z=\lambda(\cos\theta+i\sin\theta)\\ \lambda<0\end{cases}$ alors $z=[-\lambda,\theta+\pi]$

<u>Exercice</u>

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z_1=2+2i$

$z_2=-3+i\sqrt{3}$

$z_3=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)$

$z_4=-21\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

<u>Proposition 3</u>

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z=[r,\theta]$ et $z'=[r',\theta']$. Alors :

- ❖ $\begin{cases}|\overline{z}|=|z|\\ \arg\overline{z}\equiv-\arg z[2\pi]\end{cases}$ et $\overline{z}=[r,-\theta]$
- ❖ $\begin{cases}|-z|=|z|\\ \arg(-z)\equiv\pi+\arg z[2\pi]\end{cases}$ et $-z=[r,\pi+\theta]$
- ❖ $\begin{cases}|z\times z'|=|z|\times|z'|\\ \arg(z\times z')\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]\end{cases}$ et $z\times z'=[r\times r',\arg z+\arg z']$
- ❖ $\begin{cases}\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}\\ \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\arg z\ [2\pi]\end{cases}$ et $\dfrac{1}{z}=\left[\dfrac{1}{r},-\arg z\right]$
- ❖ $\begin{cases}\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}\\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\equiv\arg z'-\arg z\ [2\pi]\end{cases}$ et $\dfrac{z'}{z}=\left[\dfrac{r'}{r},\theta'-\theta\right]$

- $\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n \times \arg z\ [2\pi] \end{cases}$ et $z^n = [r^n, n\times\theta]$ $(n \in \mathbb{N})$

Remarque

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z+z' \neq 0$. Alors l'égalité $\arg(z+z') = \arg z + \arg z'$ est fausse généralement

Exercice

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\sqrt{3}-i\right)(2+2i)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$z_1 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$z_3 = 2i\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

3 – Mesure d'angle de vecteurs et agument des nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Proposition1

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- $\overline{(\vec{u},\vec{w})} \equiv \arg(z_{\vec{w}})\ [2\pi]$
- $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
- $\overline{(\vec{w},\vec{t})} \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right)\ [2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

Proposition2

Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{t}}$ et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

- $\vec{w}$ et $\vec{t}$ colinéaires $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in \mathbb{R}$
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $\vec{w} \perp \vec{t} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{t}}}{z_{\vec{w}}} \in i\mathbb{R}$

- $(AB)\perp(CD) \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$

Proposition3

Soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$
- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$
- ABCD est un losange $\Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \left|\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \end{cases}$
- ABCD est un carré $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_Z} = \left[1, \pm\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Proposition4

Soit $A, B,$ et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A, z_B,$ et z_C. Alors :

- $A, B,$ et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- ABC est un triangle isocèle en A $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$
- ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A| = |z_C - z_B|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_C - z_A| = |z_B - z_A| \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

- ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A $\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

V – Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

1 – Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ, autrement dit : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Exemples

- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Définition2

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ c-à-d : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée **l'écriture exponentielle** ou **la forme exponentielle** du nombre complexe z.

Proposition

Soit θ et θ' deux réels quelconques. Alors :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $e^{i\alpha} + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta}{2}}\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- $e^{i\alpha} - e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\alpha+\theta+\pi}{2}}\sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$
- $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

❖ $1-e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

2 – Formules de Moivre et d'Euler

Proposition

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

❖ $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ ou $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$;[Formule de Moivre]

❖ $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$:[Formules d'Euler]

Exemples

- $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$
- $\cos(3\theta)=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ et $\sin(3\theta)=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)$

3 – linéarisation de $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$ $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$

Définition

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Linéariser $\cos^n(\theta)$, $\sin^n(\theta)$ $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ revient à écrire ses expressions sous $\sum_{k\le n}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$

Exemples

1) Linéariser $\cos^2 x$

Pour cela on sait que $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, d'après les formules d'Euler

Donc $\cos^2 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\dfrac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}=\dfrac{2\cos(2x)+2}{4}=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

D'où $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

2) Linéariser $\cos^3 x$

On a $\cos^3 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\dfrac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{i3x}}{8}=\dfrac{\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8}$

$=\dfrac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$

D'où $\cos^3 x=\dfrac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$

3) Linéariser $\sin^4 x$

On a $\sin^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\dfrac{e^{i4x}-4e^{i2x}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x}}{16}$

$$= \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$$

D'où $\sin^4 x = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$

VI – Equation du second degré à coefficients réels

Définition

Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une équation de la forme
$a z^2 + b z + c = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est son discriminant

La forme canonique du trinôme $a z^2 + b z + c$ est donnée par l'expression :

$$a z^2 + b z + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Proposition1

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant réel de l'équation (E): $a x^2 + b x + c = 0$ dont l'inconnue est z dans $\mathbb{C}$

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercices

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

* $z^2 + z + 6 = 0$
* $2z^2 - 2z + 25 = 0$

Proposition2

- Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$; les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \times z_2 = p \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - s z + p = 0$

- Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$; alors si l'on connaît l'une d'elle on calcule facilement la deuxième en utilisant l'une des deux égalités $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ ou $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$

VII - Transformations usuelles du plan et nombres complexes

1- Transformations du plan et nombres complexes

Proposition

Soit $F:\begin{cases} P & \mapsto & P \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{cases}$ une transformation du plan P dans lui-même, alors on peut lui associer une unique application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$f:\begin{cases} \mathbb{C} & \mapsto & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z'=f(z) \end{cases}$ tel que pour tos les points $M(z)$ et $M'(z')$ du plan complexe on ait : $M'=F(M)\Leftrightarrow z'=f(z)$

On dit que f caractérise l'application F et que F représente f dans le plan complexe

2 – Transformations usuelles

a) La translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan dans lui-même définie par :

$$T_{\vec{u}}:\begin{cases} P & \mapsto & P \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{cases} \quad tel\ que\ \ \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe u

L'écriture ou (formule) **complexe de la translation** $T_{\vec{u}}$ est : $\mathbf{z'=z+u}$

Effectivement ,on a :

$$M'(z')=T_{\vec{u}}(M(z))\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'})=aff(\vec{u})$$
$$\Leftrightarrow z'-z=u\Leftrightarrow z'=z+u$$

b – L'homothétie

Définition

Soit Ω un point du plan et $k\in\mathbb{R}^*$

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k est l'application définie par :

$$h:\begin{cases} P\mapsto P \\ M\mapsto M' \end{cases} \quad tel\ que\ \ \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$$

Proposition

Soit h l'homothétie de centre le point Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

L'écriture complexe de l'homothétie h est la relation : $\mathbf{z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)}$.

Effectivement, on a :

$$h(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{\Omega M'}) = k\, aff(\overrightarrow{\Omega M})$$
$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow z' = \omega + k(z - \omega)$$

c – La rotation

Définition

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$

La rotation R de centre Ω et d'angle θ est l'application définie par :

$$R : \begin{cases} P \mapsto P \\ M \mapsto M' \end{cases} \quad tel\ que \quad \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Proposition

Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est la relation :

$$\mathbf{z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)}$$

Effectivement, on a :

$$R(M(z)) = M(z') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$