I – Définition et vocabulaires

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre une fonction $y : x \mapsto y(x)$ et ses dérivées d'ordres inférieurs ou égaux à n et dont l'inconnue est la fonction y

Exemples :

- $y' - 2y = 0$; $y' + 3y - 2 = 0$ sont des équations différentielles de 1er ordre
- $y'' - 2y' + 3y = 0$ est une équation différentielle de 2ème degré

II – Equation différentuelle de premier degré $y' = ay + b \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

1 – L'équation différentielle $y' = ay \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = \lambda e^{ax}$ où λ est une constante arbitraire

Remarque :

L'équation différentielle $y' = ay$ admet une infinité de solutions

Exemples :

- La solution générale de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $y(x) = \lambda e^{2x}$ où λ est une constante arbitraire
- La solution générale de l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
  $y(x) = \lambda e^{-\frac{2}{3}x}$ où λ est une constante arbitraire

2 – L'équation différentielle $y' = ay + b \quad (a \in \mathbb{R}^*)$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où λ est une constante arbitraire

Remarque :

L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une infinité de solutions

Exemples :

- La solution générale de l'équation différentielle $y' - 2y + 3 = 0 \; (a = 2 \,;\, b = -3)$
  Est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \lambda e^{2x} + \dfrac{3}{2}$ où λ est une constante
- La solution générale de l'équation différentielle $y' + y - 4 = 0 \; (a = -1 \,;\, b = 4)$

est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x)=\lambda e^{-x}+4$ où λ est une constante

Exercice :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'-2y=5$

2) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=-1$

Corrigé :

1) L'équation différentielle (E) est du 1[er] degré où $a=2$ et $b=5$, donc la solution générale est

$$y(x)=\lambda e^{2x}-\frac{5}{2}$$ où λ est une constante arbitraire

2) f est une solution de (E) donc $f(x)=\lambda e^{2x}-\frac{5}{2}$, et comme $f(0)=-1$ alors

$\lambda-\frac{5}{2}=-1$ d'où $\lambda=\frac{3}{2}$; par suite $f(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{5}{2}$

III – Equation différentielle de second degré $y''+ay'+by=0\ (a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R})$

Définition :

Soit a et b deux réels quelconques.

L'équation $r^2+ar+b=0$ est appelée **l'équation caractéristique de l'équation différentielle** $y''+ay'+by=0$

Exemples :

- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y''-2y'+3y=0$ est $r^2-2r+3=0$
- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $2y''+3y'-y=0$ est $2r^2+r-1=0$

Propriété :

On considère une équation différentielle (ED) d'ordre 2 et Δ le discriminant de son équation caractéristique (EC). Alors les solutions de (ED) sont données dans le Tableau suivant :

(ED) Equation différentielle	(EC) Equation caractéristique	Signe de Δ	Solution de (EC)	Solutions de (ED)
$y''+ay'+by=0$	$r^2+ar+b=0$ $\Delta=a^2-4b$	$\Delta>0$	r_1 et r_2 réelles $r_1\neq r_2$	$y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ A et B des constantes
		$\Delta=0$	r_0 la solution double de (EC)	$y=(Ax+B)e^{r_0x}$ A et B des constantes
		$\Delta<0$	$r_1=p+iq,\ r_2=\overline{r_1}$ $(p,q)\in\mathbb{R}^2$	$y=e^{px}\left(A\cos(qx)+B\sin(qx)\right)$ A et B des constantes

Exercice résolu :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y''-3y'+y=0$

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0)=-2$ et $f'(0)=3$

Solution proposée :

1) l'équation caractéristique de (E) est $2r^2-3r+1=0$ dont le discriminant est $\Delta=1$ donc elle possède deux solutions réelles distinctes $r_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ et $r_2=\frac{3+1}{4}=1$. Alors les solutions de (E) sont $y=Ae^{\frac{1}{2}x}+Be^x$ où A et B sont des constantes

2) f est une solution de (E) donc $f(x)=Ae^{\frac{1}{2}x}+Be^x$

Comme $f(0)=-2$, alors $A+B=-2$ ①

Et on a $f'(x)=\frac{A}{2}e^{\frac{1}{2}x}+Be^x$, comme $f'(0)=3$, alors $\frac{A}{2}+B=3$②

① et ② donne le système $\begin{cases}\frac{A}{2}+B=3\\ A+B=-2\end{cases}$ à résoudre Donc $\begin{cases}A=-10\\ B=8\end{cases}$

D'où $f(x)=-10e^{\frac{x}{2}}+8e^x$