1 – Définition

Définition :

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

On dit que F est une fonction primitive de f si et seulement si :

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I),\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

2 - Propriétés

Proposition1 :

Toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une fonction primitive sur cet intervalle

Proposition2 :

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I. Alors :

- Les fonctions $G_k : x \mapsto F(x) + k$ sont des primitives de f sur I, pour tout réel k
- En particulier, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive H de f sur I telle que : $H(x_0) = y_0$

Proposition 3 :

Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

Une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si :

$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in I);\ G(x) = F(x) + k$

3 – Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
a (a = constante)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0,+\infty[$

$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x^r\ (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$\mathbb{R}$

4 – Opérations des fonctions usuelles et primitives

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et U une primitive de u sur I et V une primitive de v sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$

f	F
$u+v$	$U+V+c$
αu	$\alpha U + c$
$u'v+uv'$	$uv + c$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c$
$u'u^r\ (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}+c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+c$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+c$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+c$
$\frac{\alpha u'}{u^r}\ (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$-\frac{\alpha}{(r-1)u^{r-1}}$