Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a/ $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$; b/ $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4-x}}{1-2\sqrt{x+2}}$

c/ $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;d/ $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^3}+5$

e/ $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-5x+2}+2\sqrt[5]{9-x^2}$

f/ $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{2x-3}{x^2-4}}$; g/ $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x^4-3x^2+1}}{\sqrt[3]{|x-2|}-2}$

h/ $f(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt[6]{(x-1)^2}}$; i/ $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4}}{2x-3}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a/ $x^3-8=0$;b/ $x^3+8=0$;c/ $x^4-256=0$

d/ $x^4+256=0$;e/ $\sqrt[3]{x-2}=1$;f/ $\sqrt[3]{x-1}=-\sqrt{5}$

g/ $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}$;h/ $\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}=2$

i/ $x^6-3x^3-4=0$;j/ $x\sqrt[3]{x}-5=0$

Exercice 3

1/ Ecrire les fractions suivantes avec un dénominateur entier : $A=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

$B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$;$C=\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}+1}$

2/ Comparer $\sqrt[3]{2}$ *et* $\sqrt[4]{5}$; $4^{\frac{1}{3}}$ *et* $7^{\frac{1}{5}}$; $3^{\frac{1}{4}}$ *et* $\sqrt[3]{5}$.

3/ Simplifier les fractions suivantes :

$E=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}\times\sqrt[12]{16}}{\sqrt[5]{2}}$; $F=\dfrac{\left(\sqrt[3]{8}\right)^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2}\times\sqrt[12]{64}}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+5}-x$;b/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+3}+x$

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+5}-2x$;d/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[4]{2x^4+x-1}+3x$

e/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x+2}-\sqrt[3]{2x^3+1}$; f/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}}$

g/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x+1}-\sqrt{x^2+5}$; h/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x}}$

i/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{2-x^3}}$;j/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

k/ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$ l/ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

m/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$ n/ $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x}-2}$;

o/ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+10}-2}{x+2}$;p/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt[3]{x+8}}$

q/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2}$;r/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[6]{x+1}-1}$

s/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{2}}$; t/ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5\sqrt[3]{x^2-1}-2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1}\times\sqrt{x^3-2}-10}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$

1/ a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation :

$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}=0$

b/ En déduire D_f, l'ensemble de définition de f

2/ a/ Montrer que :

$(\forall x\in D_f);f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[12]{1+x}\left(1+\sqrt[12]{1+x}\right)}$

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)$

3/ Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0=0$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} & ; \ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^2+1} & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

1/Etudier la continuité de la fonction f en 0

2/Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 0]$

a/Montrer que g est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer

b/Montrer que : $(\forall x \in J)$; $g^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2x-1}}$

c/Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}\right[$

d/Déduire que : $\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \dfrac{2}{3}$

Exercice 6

1/ Calculer les valeurs des nombres suivants :

$A = Arc\tan(1)$; $B = Arc\tan(\sqrt{3})$;

$C = Arc\tan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $D = Arc\tan\left(\tan\left(-\dfrac{41\pi}{4}\right)\right)$

$E = Arc\tan\left(\tan\left(\dfrac{71\pi}{3}\right)\right)$; $F = Arc\tan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$

$G = Arc\tan\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$; $H = Tan\left(Arc\tan\left(\dfrac{25}{6}\right)\right)$

$I = Arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right) + Arc\tan\left(\dfrac{1}{5}\right) + Arc\tan\left(\dfrac{1}{8}\right)$

$J = Arc\tan 2 + Arc\tan 3 + Arc\tan\left(2+\sqrt{3}\right)$

2/ Montrer que :

a/ $Arc\tan\left(\dfrac{4}{3}\right) = 2Arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b/ $Arc\tan\left(\dfrac{24}{7}\right) = 2Arc\tan\left(\dfrac{3}{4}\right)$

3/ Calculer :

a/ $Arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right) + Arc\tan\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

b/ $Arc\tan\left(\dfrac{4}{3}\right) - Arc\tan(2)$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1/ $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\dfrac{3x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

2/ $Arc\tan(x) - \dfrac{\pi}{4} = 2Arc\tan\left(\dfrac{1}{4}\right)$

3/ $Arc\tan(2x) + Arc\tan x = \dfrac{\pi}{4}$

4/ $Arc\tan x + Arc\tan\left(x\sqrt{3}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$

5/ $Arc\tan(x-1) + Arc\tan x + Arc\tan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

6/ $Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) + Arc\tan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x$; b/ $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x$

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan\left(x^2-2x+5\right)$;d/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{Arc\tan x}{x}$

e/ $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan\left(2x^2+3x-1\right)$;f/ $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)$

g/ $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan\left(\dfrac{2x+1}{2x\sqrt{3}-5}\right)$; h $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan\left(\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}\right)$

i/ $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{3x^2+x-1}}{x^2+3}\right)$;j/ $\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan\left(\dfrac{2x^2+x+5}{3-x}\right)$

k/ $\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan\left(\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+x^2+x+1}\right)$;l/ $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{3Arc\tan x-\pi}{x-\sqrt{3}}$

m/ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{Arc\tan\left(x^2+x\right)}{x}$; n/ $\lim\limits_{x\to2^+} Arc\tan\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$

o/ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{x}\right)}{Arc\tan\left(x^2\right)}$; p/ $\lim\limits_{x\to0^+} xArc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice 10

Montrer que :

a/ $Arc\tan\left(\frac{1}{7}\right)+2Arc\tan\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$

b/ $Arc\tan\left(\frac{4}{3}\right)=2Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)$

c/ $4Arc\tan\left(\frac{1}{5}\right)-Arc\tan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$

d/ $Arc\tan\left(\frac{24}{7}\right)=2Arc\tan\left(\frac{3}{4}\right)$

Exercice 11

Montrer que :

a/ $(\forall x>0);\ Arc\tan x+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

b/ $(\forall x<0);\ Arc\tan x+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

c/ $(\forall x<0);\ Arc\tan(x+1)-Arc\tan x=Arc\tan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$

d/ $(\forall x\in\mathbb{R});\ \sin(Arc\tan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

e/ $(\forall x\in\mathbb{R});\ \cos(Arc\tan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 12

1/ Montrer que :

$Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)+Arc\tan\left(\frac{1}{5}\right)+Arc\tan\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$

2/ a/ En déduire que :

$Arc\tan 2+Arc\tan 5+Arc\tan 8=\frac{5\pi}{4}$

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$,l'équation :

$Arc\tan(x-3)+Arc\tan x+Arc\tan(x+3)=\frac{5\pi}{4}$

Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$g(x)=\frac{1}{Arc\tan x}-\sqrt[3]{Arc\tan x}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2/ Montrer que g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

3/ a/ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α *dans* $\mathbb{R}^{+*}$

b/ Vérifier que : $1<\alpha<\sqrt{3}$ puis déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 14

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$h(x)=xArc\tan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

1/ Montrer que la fonction h admet un prolongement par continuité en 0 ; $\tilde{h}$ que l'on déterminera.

2/ Montrer que la fonction h est paire

3/Montrer que :

$(\forall x>0);\ h(x)=\frac{\pi}{2}x-\frac{x}{2}Arc\tan x$

4/ On considère l'équation :

$(E):\ Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{5\pi}{12}$

a/ Montrer que :

$(E)\Leftrightarrow x\in\,]0;+\infty[\ \text{et}\ h\left(\sqrt{x}\right)=\frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$

b/ Résoudre dans $]0;+\infty[$, l'équation (E)

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right); x\neq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1/ Montrer que la fonction f est impaire

2/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$

3/ a/ Montrer que la fonction $u\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$

b/ En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$

4/ Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer

5/ a/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

b/ En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = \dfrac{1}{2} Arc\tan x$

Exercice 16

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$v(x) = Arc\tan\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

1/ Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet une unique solution α *dans* $\mathbb{R}^{+*}$

2/ Vérifier que $1 < \alpha < 3\sqrt{3}$ et déterminer le signe de $v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

3/ Montrer que : $1 < \tan\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) < \sqrt{3}$

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + Arc\tan x$$

1/ a/ Montrer que la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera

2/ a/ Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution x_n *dans* $\mathbb{R}$

Et que : $0 < x_n < 1$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ x_{n+1} < x_n$

Exercice 18

1/ a/ Montrer que : $\forall (a;b) \in]-1;1[^2$;

$$Arc\tan(a) + Arc\tan(b) = Arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

b/ En déduire la valeur du nombre

$$S = 5Arc\tan\left(\frac{1}{8}\right) + 2Arc\tan\left(\frac{1}{18}\right) + 3Arc\tan\left(\frac{1}{57}\right)$$

2/ a/ Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$

b/ En déduire les solutions de l'équation :

$$Arc\tan x + Arc\tan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 19

1/ Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[$;

$$Arc\tan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + Arc\tan x = \frac{\pi}{4}$$

2/ En déduire la valeur de

$Arc\tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + Arc\tan x$ pour tout $x \in]-\infty;-1[$

Exercice 20

Soit p un entier naturel non nul.

1/ Montrer que :

$$Arc\tan\left(\frac{p}{p+1}\right) - Arc\tan\left(\frac{p-1}{p}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{2p^2}\right)$$

2/ Soit n un entier naturel non nul. Donner en fonction de n l'expression $S(n) = \sum_{p=1}^{n} Arc\tan\left(\dfrac{1}{2p^2}\right)$

3/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S(n)$

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2$

1/ a/ Déterminer deux fonctions u et v telles que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+2}\right); f(x)=u\circ v(x)$

b/ En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2/ a/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera

b/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de J