Exercice 1

Soit $n\in\mathbb{N}$,tel que $n\geq 2$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ $par : f_n(x)=x-cos\left(\frac{x}{n}\right)$.

1/ a/ Montrer que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

b/ En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n $dans \mathbb{R}$ $et\ que : 0<\alpha_n<1$

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in]0;1[);f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b/ Etudier le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$

3/ Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 2

I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-1+Arc\tan x$

1/ Etablir que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)>2$

2/ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa fonction réciproque

3/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $0<\alpha<1$

4/ Montrer que : $(\forall x\in]\alpha;+\infty[);f(x)>x$

II - Soit $a\in]\alpha;+\infty[$ et soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=f(u_n);n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>\alpha$

2/ Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire sa convergence

3/ a/ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=0\ et\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$

1/ a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});0\leq u_n<4$

b/ Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

c/ En déduire la convergence de la suite (u_n)

2/ a/ Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $g(x)=\frac{3}{4+\sqrt{3x+4}}$

b/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

c/ Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});4-u_n\leq 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3/ On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$

a/ Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

b/ Montrer par l'absurde que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée

4/ a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n\geq 4n-4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

Exercice 4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $par : h_n(x)=x+n-n\times\tan x$

1/ a/ Etudier les variations de la fonction h_n

b/ Montrer que l'équation $h_n(x)=0$ admet une unique solution α_n $dans\ l'intervalle\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

c/ Vérifier que $\alpha_n \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ et que $tan\left(\alpha_n\right)=1+\frac{\alpha_n}{n}$

2/ a/ Montrer que :
$\left(\forall x\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\right)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);h_{n+1}\left(x\right)<h_n\left(x\right)$

b/ Montrer que la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ est décroissante

c/ Prouver que la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 5

On considère la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n^2};n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1/ a/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0<a_n<1$

b/ Etudier le sens de variation de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$

c/ En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente

2/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;1\right]$ par : $f\left(x\right)=\frac{2x}{1+x^2}$

a/ Montrer que f est continue sur $\left[0;1\right]$ et que $f\left(\left[0;1\right]\right)\subset\left[0;1\right]$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

3/ Soit $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);b_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}2^k a_k$

a/ Montrer que :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left[2^{n+1}a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}2^k a_k\right]$

b/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\sum_{k=1}^{n}2^k a_k<2^{n+1}a_{n+1}$

c/ Déduire que la suite $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ est croissante

d/ Montrer que la suite $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ est majorée par 2, et en déduire qu'elle est convergente

4/ a/ Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\frac{2^{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{2^n}{a_n}=2^n a_n$

b/ En déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);b_n=\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{2^{n-2}}$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

Exercice 6

Soit $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$ et $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cos\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$

1/ a/ Montrer que :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\forall k\in\ 1;n\ \right);\frac{1}{\sqrt{2n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

b/ En déduire que :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\frac{\sqrt{2n}}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{n}{\sqrt{n+1}}$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}$

2/ a/ Dresser le tableau de variation sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction f définie par :

$f\left(x\right)=x-1+cos\,x$ b/ Montrer que :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);1-\frac{1}{\sqrt{k+n}}\leq cos\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)\leq 1$ et que :

$1-\frac{v_n}{n}\leq u_n\leq 1$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 7

1/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$.

Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

2/ Soit $\left(c_n\right)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} c_0=1 \\ c_{n+1}=f\left(c_n\right);\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);0<c_n\leq 1$

b/ Etudier la monotonie de la suite (c_n)

c/ En déduire la convergence de la suite (c_n)

3/ a/ Montrer que :
$$\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right]\right);\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2(x)}}=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});c_n=\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

4/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k c_k$,

$T_n=S_{2n}$ et $R_n=S_{2n+1}$

a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});R_n<T_n$

b/ Montrer que les suites (R_n) et (T_n) sont adjacentes

c/ En déduire que les suites (R_n) et (T_n) sont convergentes vers la même limite L vérifiant $2-\sqrt{2}\le L\le 1$

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n\ge1}$ une suite telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);a_n>0$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\ge n^2$

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\ge1}$ la suite telle que :
$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\sqrt{1+n+u_n};n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

1/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);u_n\le\sqrt{2n+1}$

b/ Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\sqrt{1+n+\sqrt{2n+1}}\le\sqrt{2n+3}$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n\ge2);\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}}$

b/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n-1}}{n}=0$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}$

3/ a/ Montrer que :
$$(\forall n\ge2);u_n-\sqrt{n}=\frac{\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}}{1+\frac{u_n}{\sqrt{n}}}\times\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

b/ déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-\sqrt{n}$

Exercice 10

Soit (x_n) la suite définie par : $\begin{cases}x_0\in\left]0;1\right[\\ x_{n+1}=1+\frac{x_n}{n+1}\end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});0<x_n<2$

2/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$

Exercice 11

On considère la suite $(w_n)_{n\ge1}$ définie par :
$$\begin{cases}w_1=1\\ w_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right);n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

1/ En appliquant le TAF à la fonction f $:x\mapsto\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

sur les intervalles $[k;k+1]$ où $k\in⟦1;n⟧$.

Montrer que :
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);w_n-\frac{1}{n}\le\frac{2}{3}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}\le w_n-\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2/ déduire que la suite $(w_n)_{n\ge1}$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ a/ Calculer les limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{t\to0}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}$

b/ Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ puis donner une interprétation graphique au résultat

2/ Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation

3/ Construire la courbe $\left(C_f\right)$

$\left(on\ prendra\ pour\ unité\ graphique\ 2\,cm\right)$

4/ On note par g la restriction de f sur l'intervalle $I=\left[1;+\infty\right[$

a/ Montrer que g est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J que l'on déterminera

b/ Soit g^{-1} sa fonction réciproque de g. Donner l'expression de $g^{1}\left(x\right)\ pour\ tout\ x\in J$

5/ Montrer que l'équation $f\left(x\right)=x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[1;2\right]$

6/ On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$u_0=1\ et\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}$

a/ Etablir que : $f\left(2\right)>\frac{\pi}{3}$

b/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);1\le u_n\le 2$

c/ En utilisant le TAF, montre que :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left|u_{+1}-\alpha\right|\le\frac{1}{4}\left|u_n-\alpha\right|$

d/ En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 13

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right)=x+Arc\tan x$

1/ a/ Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation

b/ Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer

2/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $g\left(x\right)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution $x_n\ dans\ \mathbb{R}$ et que $0<x_n<1$

3/ On considère la suite $\left(x_n\right)_{n\ge1}$ ainsi définie.

a/ Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\ge1}$ est strictement décroissante

b/ Calculer la limite de la suite $\left(x_n\right)_{n\ge1}$

Exercice 14

1/ On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_n=\left(1-\frac{\pi}{9}\right)^n$ et on pose :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);S_n=\sum_{j=0}^{n-1}u_j$.

Déterminer S_n en fonction de n, et calculer $\lim_{n\to+\infty}S_n$

2/ On considère la suite $\left(w_n\right)$ définie par :

$$\begin{cases}w_0=0\\ w_{n+1}=Arc\tan\left[u_n+\tan\left(a_n\right)\right];n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);0\le w_n<\frac{\pi}{2}$

b/ Etudier le sens de variation de la suite $\left(w_n\right)$ et en déduire sa convergence

c/ Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}w_n=\frac{7\pi}{18}$

Exercice 15

A- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n\left(x\right)=x^{2n+1}+3x-2$, et soit $\left(C_n\right)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ a/ Dresser le tableau de variation de f_n

b/ Montrer que le point $I\left(0;-2\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\left(C_n\right)$

c/ Déterminer le point d'inflexion de la courbe $\left(C_n\right)$

2/ a/ Etudier la position relative de $\left(C_n\right)$ et $\left(C_{n+1}\right)$

b/ En déduire que toutes les courbes $\left(C_n\right)$ passent par trois points fixes I, A et B que l'on déterminera

3/ a/ Montrer que f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit f_n^{-1} sa fonction réciproque b/ Calculer $\left(f_n^{-1}\right)'(-6)$, $\left(f_n^{-1}\right)'(-2)$ et $\left(f_n^{-1}\right)'(2)$

4/ a/ Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}$ et que $0<x_n<\frac{2}{3}$

b/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0<x_n^{2n+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$

c/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$

d/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{2n+1}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

B- On suppose dans cette partie que $n=1$, et on note $f=f_1$ et $\alpha=x_1$

1/ Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ par : $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

a/ Montrer que : $\varphi\left(\left[0;\frac{2}{3}\right]\right)\subset\left[0;\frac{2}{3}\right]$

b/ Montrer que : $\left(x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\right);\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\times\frac{2x+\alpha}{3\left(x^2+1\right)}$

c/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{-}{3}\right]\right);\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3\left(x^2+1\right)}\leq\frac{2}{3}$

d/ En déduire que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\right);|\varphi(x)-\alpha|\leq\frac{2}{3}|x-\alpha|$

2/ Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases}u_0=0\\ u_{+1}=\varphi(u_n);n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);0\leq u_n\leq\frac{2}{3}$

b/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$

c/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et montrer que : $\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

Exercice 16

A- 1/ Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2=x+1$. On notera par φ sa solution positive que l'on nommera « le nombre d'or »

2/ Montrer que : $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$

B- Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite (F_n) définie par :
$$\begin{cases}F_0=F_1=1\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n;n\in\mathbb{N}\end{cases}$$
On considère la suite (u_n) définie par : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$

1/ Démontrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);F_n\geq 1$

2/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$

3/ Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\varphi$

4/ a/ Démontrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}-\varphi=\frac{\varphi-u_n}{\varphi\times u_n}$

b/ En déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);|u_{n+1}-\varphi|\leq\frac{1}{\varphi}|u_n-\varphi|$

c/ Démontrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);|u_n-\varphi|\leq\left(\frac{1}{\varphi}\right)^n|1-\varphi|$

d/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

C- 1/ Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);F_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\times\sqrt{5}}$

2/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$