Exercice 1

Soit P, Q et R trois propositions. Dresser les tableaux de vérité des propositions suivantes :

1. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$
2. $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$

Exercice 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Exprimer à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f s'annule sur I
2. f est constante sur I
3. f est strictement croissante sur I

Exercice 3

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :

P : « $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 > 0$ »

Q : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y^2$ »

Exercice 4

Soit x un nombre réel positif te que : $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 2 > 0$

1. Montrer que : $x + 2 \leq \sqrt{3+\sqrt{3}} \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)^2 \leq 3$
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que : $\sqrt{3+\sqrt{3}} < 2 + x$

Exercice 5 :

1. Soit x et y deux nombres réels de $]-1,1[$. Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$
2. Soient $x,\ y,\ \alpha$ et β des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{\alpha x + \beta y}{\beta x + \alpha y}$$

Exercice 6 :

Déterminer la négation puis la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P : "(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}),\ x \leq y"$
- $Q : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}),\ n \leq x < n+1"$
- $R : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z}),\ n > x"$
- $S : "(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ xy = 0 \wedge (x \neq 0 \wedge y \neq 0)"$
- $T : "(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}),\ a x^2 + 2x - a \neq 0"$

Exercice 7

Démontrer que pour tout x et y de l'ensemble $\mathbb{R}-\{-3\}$, on a : $(x\neq y)\Leftrightarrow\left(\frac{4x-1}{x+3}\neq\frac{4y-1}{y+3}\right)$

Exercice 8

1) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition suivante est fausse :

$$(\forall x\in]0,1[),\ \frac{3}{x(1-x^2)}<1$$

2) Montrer, à l'aide des équivalences successives, que la proposition suivante est vraie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{+2},\ x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

3) Montrer, à l'aide de la contraposée, que la proposition suivante est vraie :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2;\left[(xy\neq 1\ et\ x\neq y)\Rightarrow\frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}\right]$$

4) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ \sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 9

Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que : $ab+bc+ca=1$

1) Montrer que $a^2+b^2\geq 2ab$, puis déduire que $a^2+b^2+c^2\geq 1$

2) Montrer par l'absurde que : $a+b\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\ ou\ b+c\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\ ou\ c+a\geq\frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 10

1) a) Soit $a\in]0,+\infty[$. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ (1+a)^n\geq 1+an$

b) Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \frac{5^{n+1}+2\times 3^n+1}{8}\in\mathbb{N}$

Exercice 11

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

1) Calculer S_1, S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ S_n=\frac{n}{2n+1}$