Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f_n(x) = n\,x^{n+1} - (n+1)x^n - 1$.

1/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n *dans* $]1;+\infty[$.

2/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 < \alpha_n - 1 \leq \frac{2}{n}$

3/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$

1/ Montrer que l'équation (E_n) possède une unique racine a_n *dans* $\mathbb{R}^+$ et que $a_n \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

2/ Montrer que la suite (a_n) est décroissante, et en déduire quelle est convergente

3/ Calculer sa limite

Exercice 3

On considère la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 2,\ a_1 = \frac{4}{9} \\ a_{n+2} = \frac{4}{9}a_{n+1} - \frac{1}{27}a_n;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et la suie la suite (b_n) définie par :

$(\forall n \in \mathbb{N}); b_n = a_n - \frac{1}{3^n}$.

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2/ a/ Montrer que la suite (b_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Exprimer b_n *puis* a_n en fonction de n

c/ Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n$

3/ Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ et la suite (x_n) définie par :

$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = f(x_n);\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$, et (y_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); y_n = n \times x_n$

1/ Etudier les variations de f sur $[0;1]$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

3/ a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$ en fonction de x_{n-1}

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 < \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$

c/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); n < \frac{1}{x_n} - 1 \leq n + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

4/ a/ Montrer que : $(\forall n \geq 2); \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 2\sqrt{n}$

b/ Montrer que la suite (y_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2/ a/ Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > n^2$

b/ Calculer la limite de la suite (u_n)

3/ Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = (n+1)^2$

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n < 4$

b/ Etudier le sens de variation de la suite (u_n)

c/ En déduire la convergence de la suite (u_n)

2/ a/ Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $g(x) = \frac{3}{4 + \sqrt{3x+4}}$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

c/ Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3/ On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a/ Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$

b/ Montrer par l'absurde que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ n'est pas majorée

4/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n \geq 4n - 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b/ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 7

On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n^2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < a_n < 1$

b/ Etudier le sens de variation de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$

c/ En déduire que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente

2/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

a/ Montrer que f est continue sur $[0;1]$ et que $f([0;1])\subset[0;1]$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 8

Soit (x_n) la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in]0;1[\\ x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{n+1} \end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});0<x_n<2$

2/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$