Exercice 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} + Arc\tan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) & ; x<1 \\ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$

et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

2/ Etudier la dérivabilité de la fonction g à droite et à gauche de $x_0 = 1$ et interpréter graphiquement ces résultats

3/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\});\begin{cases} g'(x) = \frac{2x}{x^4+1} & ; x<1 \\ g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} & ; x>1 \end{cases}$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction g

4/ a/ Etudier les branches infinies de (C_g) et étudier sa position par rapport à son asymptote oblique

b/ Construire la courbe (C_g)

5/ Soit h la restriction de g à l'intervalle $]-\infty;0[$

a/ Montrer que h est une bijection de $]-\infty;0[$ vers un intervalle J à déterminer

b/ Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. où h^{-1} est la fonction réciproque de h

Exercice 2

I- Soit g la fonction définie par : $g(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x}{(x-1)^2+1}$

1/ Déterminer D_g l'ensemble de définition de g

2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in D_g); g'(x) = \frac{2x-4}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$

b/ étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation

3/ Montrer que : $(\exists! \alpha \in]1,2;1,4[) : g(\alpha) = 0$ $\left(\text{On donne } Arc\tan 5 \simeq 1,37 \text{ et } Arc\tan\left(\frac{5}{2}\right) \simeq 1,19\right)$

4/ En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in D_g$

II- On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\,Arc\tan\left(\frac{1}{x-1}\right)$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f , calculer les limites de f aux bornes de D_f

2/ a/ Montrer que f est dérivable sur chaque intervalle de D_f , et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$

b/ Dresser le tableau de variation de f

3/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); Arc\tan|x| + Arc\tan\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{\pi}{2}$

b/ On note f_1 *et* f_2 respectivement les prolongements par continuité à droite de 1 et à gauche de 1.
Montrer que f_1 est dérivable à droite en 1 et que f_2 est dérivable à gauche en 1

4/ Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et ses demi-tangentes aux points $A\left(1;\, f_1(1)\right)$ et $B\left(1;\, f_2(1)\right)$
$\left(\text{on prend } f(\alpha) \simeq 1{,}6\right)$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & ; x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; x < 2 \end{cases}$

et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f

2/ Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

3/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$

4/ Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 2$

5/ a/ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-\infty; 2\right[$ et pour tout $x \in \left]2; +\infty\right[$

b/ Dresser le tableau de variation de f

6/ Construire $\left(C_f\right)$. $\left(\text{on prendra } f(0) = 0{,}4\right)$

7/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty; 2\right[$.

a/ Montrer que g est une bijection de $\left]-\infty; 2\right[$ vers un intervalle J à déterminer.

b/ Construire la courbe $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère.

8/ a/ Montrer que : $\left(\exists k \in \left]0;1\right[\right)\left(\forall x \in \left]0;1\right[\right)\ ;\ 0 < g'(x) < k$

b/ En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;1]$; où $h(x) = g(x) - x$

c/ Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in \left]0;1\right[\right) : g(\alpha) = \alpha$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \arctan(x - 1 + \arctan x + \arctan(x+1)$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on déterminera

2) En déduire que l'équation (E) : $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]0,1\right[$

3) Donner la valeur exacte de α

Exercice 5

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{\pi x}{2 Arc\tan x} ; x \neq 0 \\ h(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

et soit $\left(C_h\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ a/ Etudier la parité de h

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$

c/ Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)-x=\frac{2}{\pi}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2/ Etudier la continuité de h en 0 puis sur $\mathbb{R}$

3/ a/ Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)(\forall c\in]0;x[) : \frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+c^2}<1$

b/ Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[) ; \frac{x}{1+x^2}< Arc\tan x < x$

c/ Montrer que h est dérivable à droite en 0, et interpréter graphiquement ce résultat.

4/ a/ Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

b/ Etudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$

c/ Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

5/ Construire la courbe (C_h)

6/ Soit g la restriction de h à l'intervalle $[0;+\infty[$

a/ montrer que g est une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera. On note g^{-1} sa fonction réciproque

b/ Dresser le tableau de variation de g^{-1}

c/ Calculer $g^{-1}(2)$ et $(g^{-1})'(2)$

d/ Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(C_{g^{-1}})$