Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1/ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$; $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; $\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7$; $\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

2/ Comparer les nombres suivants :

$\sqrt[5]{13}$ *et* $\sqrt[5]{28}$; $\sqrt[5]{2}$ *et* $\sqrt[7]{3}$; $\sqrt[3]{7}$ *et* $\sqrt{10}$; $5^{\frac{2}{3}}$ *et* $8^{\frac{1}{5}}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- $x^3=8$
- $(x-2)^3=-27$
- $\sqrt[5]{3x-4}=2$
- $x-\sqrt[3]{x^2+1}+1=0$
- $\sqrt{2}\sqrt[6]{x}-\sqrt{\sqrt{x}+1}=0$
- $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^3+216=0$
- $x+1-\sqrt[3]{x^3+1}=0$
- $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$
- $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[4]{x^4+5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Exercice 4

On considère la fonction f Définie sur D_f , par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-2}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

1) a) Montrer que $D_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

2) On note g sa restriction sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2+3x$

On note g sa restriction sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$

On note g sa restriction sur l'intervalle $I=]-1,1[$

1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2) a) Montrer que la fonction g est impaire

b) Déduire la parité de la fonction g^{-1}

3) a) Calculer $g^{-1}(0)$

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

4) Résoudre l'équation : $g^{-1}(x) - x = 0$

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2-1}$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

2/ Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction h à droite de $x_0 = 1$; et interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[;\ h'(x) = \dfrac{2x(x^2-2)}{\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)\sqrt{x^2-1}}$

c/ En déduire que h est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[1;\sqrt{2}\right]$; puis dresser son tableau de variation.

4/ Soit g la restriction de h sur l'intervalle . $I = \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b/ Montrer que : $\forall x \in I ;\ g(x) = \left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2$

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$

I - On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1/ Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$

2/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2 < \alpha < 0$

3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

II - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$$

1/ Calculer les limites de f en $+\infty$ *et* $-\infty$

2/ Calculer $f'(x)$ et montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \dfrac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$

3/ Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

4/ a/ Montrer que : $f(x) = \dfrac{x(x^3-4)}{x^3+x}$

b/ En déduire que : $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

Exercice 9

1/ Démontrer que l'équation : $x^3 + 3x = 5$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

2/ Montrer que : $1<\alpha<2$

3/ donner un encadrement d'amplitude 25×10^{-2}

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-6x^2+5$

1/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

2/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$:
α,β et γ telles que $\alpha<\beta<\gamma$

3/ Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 11

Soit f une fonction définie et continue sur [-3;4] dont le tableau de variations est :

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↘	-3	↗	1

Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

- $f(x)=3$
- $f(x)=0$
- $f(x)=-2$
- $f(x)=7$
- $f(x)=-5$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x-5}{2x^2-5x+3}$ $\quad b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-\sqrt[3]{5x-2}}{x-2}$

$e)\ \lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\quad g)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-4x+1}-x+3$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-2x-3}-\sqrt[3]{x^2+1}$

$i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$ $\quad j)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+4x+2}+\sqrt{x^3-5x^2+1}-2x$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-1}+3\ ;\ x\geq1 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}\ ;\ x<1 \end{cases}$

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0=1$

3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]1,+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

c) Résoudre dans J, l'équation : $g^{-1}(x) = 2$

Exercice 15

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f

3) Etudier les variations de la fonction f sur D_f

4) On considère l'équation $(E) : f(x) = x$

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,2[$

b) Montrer que : $2 - \alpha = \sqrt[3]{\alpha^2 - 1}$

c) Donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

5) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Déterminer $g^{-1}([0,1])$

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 16

Montrer que l'équation : $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;2[$