Exercice 1 :

Soit f une application de E vers F .

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $A \subset f^{-1}(f(A))$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2) En plus si f est injective, alors : $A = f^{-1}(f(A))$ et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

3) Montrer que pour toutes parties A' et B' de F, on a :

a) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

b) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Exercice 2 :

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 + x + 3 \end{cases}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 3$. Que peut-on en déduire ?

2) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \geq \frac{11}{4}$. L'application f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

a) Montrer que g est une bijection de I vers $J = \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[$

b) Déterminer en fonction de x, $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 3

Soit f une application définie de E vers F et soit $A \subset E$

1) Montrer que : $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$

2) Montrer que si f est surjective de E vers F, alors $F \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$

3) Montrer que si f est injective de E vers F, alors $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$

4) Montrer que si f est bijective de E vers F, alors $f\left(C_E^A\right) = C_F^{f(A)}$

Exercice 4

Soit E un ensemble non vide et soit A et B deux parties non vides de E.

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$

1) Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$

2) Démontrer que f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

3) Si $B=\overline{A}$, montrer que f est bijective puis déterminer f^{-1}

Exercice 5

Soit f une application définie de E vers F .

1) Montrer que : $\left(\forall A\in\mathcal{P}(E)\right),\ f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)=A\Leftrightarrow f$ est injective

2) Montrer que : $\left(\forall B\in\mathcal{P}(F)\right),\ f\left(f^{-1}\left(B\right)\right)=B\Leftrightarrow f$ est surjective de E vers F

Exercice 6

Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications.

1) Montrer que : $g\circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

2) Montrer que : $g\circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Exercice 7

Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications.

On considère l'application $h:\begin{cases}E\to F\times G\\ x\mapsto h(x)=\left(f(x),g(x)\right)\end{cases}$

1) Montrer que : f ou g injective$\Rightarrow h$ injective

2) Si f et g sont surjectives , est-ce-que h est surjective ?

Exercice 8

Soit A une partie d'un ensemble E . Démontrer que :

1) $\left(\forall X\in\mathcal{P}(E)\right),\ A\cup X=E\Rightarrow A=E$

2) $\left(\forall X\in\mathcal{P}(E)\right),\ A\cap X=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$

Exercice 9

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les propositions suivantes :

1) $\left(A\Delta B\right)\Delta B=A$

2) $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$

3) $\left.\begin{matrix}A\cup B\subset A\cup C\\ A\cap B\subset A\cap C\end{matrix}\right\}\Rightarrow B\subset C$

4) $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$

5) $\left(A\setminus B\right)\setminus B=A\setminus B$

Exercice 10

Soit $f:E\to E$ une application vérifiant $f\circ f\circ f=id_E$.

Montrer que f est bijective de E dans E et déterminer sa bijection inverse f^{-1}