Exercice 1

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=Arc\tan\left(\sqrt[3]{\tan x}\right);\ 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \\ g(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \qquad ;x<0 \end{cases}$

et soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ a/ Etudier la continuité de g sur $\left]-\infty;\frac{\pi}{2}\right]$

b/ Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 0

c/ Etudier la dérivabilité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$

2/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);\ g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, puis interpréter ce résultat graphiquement

3/ Etudier la branche infinie de la courbe (C_g) au voisinage de $-\infty$

4/ a/ Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$ et pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b/ Dresser le tableau de variation de g

5/ Soit h la restriction de g à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

a/ Montrer que h réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Soit h^{-1} sa fonction réciproque

b/ Déterminer l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

6/ Résoudre dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'inéquation $h(x)<x$

7/ Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C_g) et $(C_{g^{-1}})$

Exercice 2

Soit f la fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=1 \text{ et } \left(\forall x\in\left]0;1\right[\right);\ f'(x)=-\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

1/ a/ On pose : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right); g(x)=f(\cos x)$. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que sa dérivée est une constante.

b/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right); g(x)=\frac{2}{\pi}x$, et calculer $f(1)$

c/ Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ vers $[0;1]$, et donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0;1]$

2/ On pose , pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $h(x) = f(\cos x) + f(\sin x)$

a/ Montrer que h est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$

b/ En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right); h(x) = 1$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}; x < -2 \\ f(x) = Arc\tan\sqrt{x+2} \quad ; x \geq -2 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etablir que f est continue en $x_0 = -2$

b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = -2$

c/ Montrer que $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{f(x)}{x+2} = +\infty$, et en déduire la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -2$ (on pourra poser $t = Arc\tan\sqrt{x+2}$)

2/ a/ Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

b/ Montrer que : $\begin{cases} f'(x) = 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}; x < -2 \\ f'(x) = \dfrac{1}{2(x+2)\sqrt{x+2}}; x > -2 \end{cases}$

c/ Dresser le tableau de variation de f

3/ a/ Etudier les branches infinies de (C_f)

b/ Montrer que : $(\forall x \in]-\infty;-2[); f(x) - (2x+3) > 0$ et interpréter graphiquement ce résultat

c/ Construire la courbe (C_f)

4/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;-2[$

a/ Montrer que g est une bijection de l'intervalle $]-\infty;-2[$ vers un intervalle J à déterminer

b/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

c/ Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

5/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;2]$ et soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); Arc\tan x \leq x$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 2$

c/ Montrer que la suite (u_n) strictement décroissante

d/ Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0;2]$

e/ Montrer que : $(\forall x\in[0;2]);h'(x)\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}$

f/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$

g/ En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 4

I- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases} g(x)=\frac{\tan x-x}{x};x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);(1+\tan^2 x)x-\tan x>0$

2/ a/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);g'(x)=\frac{(1+\tan^2 x)x-\tan x}{x^2}$

b/ Montrer que la fonction g est continue à droite en 0 puis étudier les variations de g sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

II- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f(x)=Arc\tan\left|\frac{\tan x-x}{x}\right|;0<x<\frac{\pi}{2} \\ f(0)=0;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Etudier la continuité de la fonction f à droite en 0 et à gauche en $\frac{\pi}{2}$

2/ a/ En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t\mapsto\tan t-t$ sur l'intervalle $[0;x]$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, montrer que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right);0\leq\tan x-x\leq x\tan^2 x$

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^2}$

c/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à la droite en 0, et donner une interprétation graphique du résultat

3/ a/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right);f(x)-\frac{\pi}{2}=-Arc\tan\left(\frac{x}{\tan x-x}\right)$

b/ Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

4/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

5/ Construire la courbe (C_f) (on prendra pour unité graphique 2cm)