Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-1}+3 \ ; \ x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \ ; \ x<1 \end{cases}$$

1/ Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

2/ Calculer les limites de f en $+\infty$ *et en* $-\infty$

3/ Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x} \ ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f

2/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0=0$

3/ Prouver que f est continue sur D_f

4/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{\sin x+\sqrt{-x}} \ ; \ x<0 \\ g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} \ ; \ x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2/ Etudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $x^4+x^2+2x-1=0 \ ; \ I=[0;1]$

2) $2\sin x=x \ ; \ I=\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

3) $x^2-5\sqrt{x}=-1 \ ; \ I=[1;4]$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants ; montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera, puis donner l'expression de $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$.

1) $f(x)=x^2-4x+3 \ ; \ I=]-\infty;2]$

2) $f(x)=\sqrt{1-x}+2 \ ; \ I=]-\infty;1]$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \ ; \ I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{2-x} \ ; \ I=]2;+\infty[$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x-4\sqrt{x}+3$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$

Exercice 7

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a/ Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1<\alpha<2$.

b/ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

2/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$

a/ Déterminer les limites de f en -1 *et en* $+\infty$.

b/ Etudier les variations de f sur $]-1;+\infty[$.

c/ Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ a/ Calculer les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$

b/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$

b/ Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation

3/ a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Calculer $f(1)$ *et en déduire* $f^{-1}(2)$

c/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, et que $1<\alpha<2$

5/ Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$.