Exercice 1

1/ Montrer que :

a/ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); \sin x \leq x$

b/ $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\right); x \leq \tan x$

c/ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); 1-x \leq \cos x \leq 1+x$

d/ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); \operatorname{Arc}\tan x \leq x$

2/ Soit u la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$u(x) = \tan x$

a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); 1 \leq u'(x) \leq 2$

b/ En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right); x \leq \tan x \leq 2x$

Exercice 2

1/ Montrer que :

a/ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); \frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arc}\tan x$

b/ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); x-\frac{x^3}{3} \leq \operatorname{Arc}\tan x \leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

2/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc}\tan x}{x} - 1; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+}$

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c/ Montrer que :

$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); -\frac{x^2}{3} \leq f(x) \leq -\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}$

d/ En déduire la dérivabilité de f à droite en 0

e/ Calculer $f'(x)$ *pour tout réel x positif*

f/ Dresser le tableau de variation de f

Exercice 3

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$ où $a < b$, et dérivables sur $]a;b[$

Montrer que :

$\left(\exists c \in]a;b[\right); [f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$

Montrer que : $\left(\exists c \in]0;1[\right); f(c) \times f'(c) = \frac{1}{2}$

Exercice 5

Soit a , b et c trois réels tels que $a < b < c$ et I un intervalle qui contient a , b et c. Soit f une fonction deux fois dérivables sur I telle que :

$f(a) = f(b) = f(c)$. Montrer que :

$\left(\exists \alpha \in]a;c[\right); f''(\alpha) = 0$

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1/ Montrer que si f est une fonction paire alors f' est impaire

2/ Montrer que si f est une fonction impaire alors f' est paire

Exercice 7

Soit f une fonction dérivable sur le segment $[a;b]$ telle que $f'(a) = f'(b)$.

Démontrer que : $\left(\exists c \in]a;b[\right); f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$

Exercice 8

Montrer qu'une fonction dont la dérivée est positive sur un intervalle I , est croissante sur cet intervalle I.

Exercice 9

Existe-il une fonction f définie et continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$ telle que $f(0) = -1, f(2) = 4$ *et* $\left(\forall x \in]0;2[\right); f'(x) \leq 2$?

Justifier

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et $f(1)-f(0)=1$.

Montrer que : $(\exists c\in]0;1[);\frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2}$

Exercice 11

Soit a et b deux réels tels que : $0\le a\le b$.

Montrer que : $\frac{b-a}{1+b^2}\le Arc\tan(b)-Arc\tan(a)\le\frac{b-a}{1+a^2}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{3-x^2}{2};x<1\\ f(x)=\frac{1}{x}\ ;x>1\end{cases}$$

1/ Montrer que :$(\exists c\in]0;2[);f(2)-f(0)=2f'(c)$

2/ Déterminer toutes les valeurs possibles de c

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3Arc\tan\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$$

1/ Etudier la dérivabilité de f en 0, et en déduire la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

2/ a/ Montrer que :

$$(\forall x\in]0;1[);x<Arc\tan x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

b/ En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\le f(x)\le x$

3/ a/ Démontrer que :

$$(\forall x\in\mathbb{R});xf'(x)=3f(x)-\frac{2x^5}{1+x^4}$$

b/ En déduire que :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\frac{x^2}{1+x^4}\left(3\sqrt{1+x^4}-2x^2\right)\le f'(x)$$

c/ Dresser le tableau de variation de f

Exercice 14

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0;1[$ telle que : $f(1)=0$ et $(\forall x\in]0;1[)$ $f(x)\neq 0$.

Montrer que : $\exists c\in]0;1[$; $\frac{f'(c)}{f(c)}=-\frac{2}{c}$

Exercice 15

<u>Rappels sur les dérivées successives</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on note par f' sa fonction dérivée. Si f' est aussi dérivable sur I, on note par f'' ou $f^{(2)}$ sa dérivée appelée dérivée seconde de f. Plus généralement on note : $f^{(0)}=f$,

$f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$ ...., $f^{(n+1)}=\left[f^{(n)}\right]'$.

Si $f^{(n)}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I.

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.

Montrer que : $(f\times g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}\times g^{(k)}$.

Cette formule s'appelle « formule de Leibniz »

Exercice 16

Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]a;+\infty[$ telle que $(\exists L\in\mathbb{R});\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L$

Exercice 17

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $h>0$ et Soit g une fonction deux fois dérivables sur l'intervalle $[a;a+2h]$.

Montrer que : $\left(\exists\theta\in\left]0;1\right[\right)$;

$g(a+2h)-2g(a+h)+g(a)=h^2g''(a+2\theta h)$

Exercice 18

1/ Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$;

$$x-\frac{x^3}{3}\le Arc\tan x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

2/ En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{Arc\tan x-x}{x^2}$

puis calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{Arc\tan x-x}{x^2}$

3/ Montrer que : $\lim\limits_{x\to0}\frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right)-x}{x^4}=-1$

Exercice 19

Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1/ Montrer que si h est paire alors $\left(\exists\alpha\in\mathbb{R}\right):h'(\alpha)=0$

2/ Montrer que si h est impaire alors $\left(\exists\beta\in\mathbb{R}\right):h''(\beta)=0$

Exercice 20

Soit a et b deux réels tels que $a<b$, et soit u et v deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telles que $u(a)=v(b)$ et $u(b)=v(a)$.

1/ Montrer que $\left(\exists x_0\in\left]a;b\right[\right):u(x_0)=v(x_0)$

2/ Montrer que $\left(\exists x_1\in\left]a;b\right[\right):u'(x_1)=v'(x_1)$

Exercice 21

On considère une fonction g continue sur $[0;1]$ telle que $g(0)=0$ et $g(1)=1$, et g est dérivable en 0 et en 1 telle que $g'(0)=g'(1)=0$.

1/ Montrer que $\left(\exists c\in\left]0;1\right[\right):\frac{g(c)}{c}=\frac{g(c)-1}{c-1}$

(considérer la fonction h définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases}h(x)=\frac{g(x)}{x}-\frac{g(x)-1}{x-1};0<x<1\\ h(0)=-1;h(1)=1\end{cases}$$
)

2/ En déduire que : $g(c)=c$