Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$;

3/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$;4/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2x-5}}{x^2-3x-7}$;

5/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^3-1}-x$; 6/ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{x^2}$; 8/ $\lim\limits_{x\to 0^+} E\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

9/ $\lim\limits_{x\to 0^+} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 10/ $\lim\limits_{x\to 0} x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

11/ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+1}{4x^2-x+2}\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$;

12/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}\cos x-1}{x^2}$;

13/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)}{x-1}$;

14/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\tan(2x)}{x^3}$;

15/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-3x}-2x}{x^2}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1/ Déterminer le domaine de définition de f

2/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0=0$.

Exercice 3

considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x^2\left[E\left(\frac{1}{x}\right)+E\left(\frac{2}{x}\right)\right]$$

1/ Montrer que :

$(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $3x-2x^2<f(x)\leq 3x$.

2/ En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et soit n un entier naturel non nul.

1/ Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $h(x)=0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

2/ a/ Montrer que $\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{4};1\right[\right)$; $h(x)=x$ et déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)$.

b/ Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x)$.

3/ Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x)=0$.

4/ a/ Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{n^2} ; \frac{1}{(n-1)^2}\right[\right) ; h(x) = (n-1)x .$$

b/ Etudier la limite de h à droite de $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 5

Montrer que la fonction f est continue en a, dans les cas suivants :

$$1/ \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^5 - x^4 + x^3 + 3}{x+1} ; x \neq -1 \\ f(-1) = 12 \end{cases} \quad ; a = -1$$

$$2/ \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2} ; x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad ; a = 0$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x-2} \; ; x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x+b}{3} \quad ; x \leq 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a *et* b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 2$:

Exercice 7

Dans chacun des cas, étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche au point x_0 :

$$1/ \begin{cases} f(x) = \dfrac{|x| + 3x}{x^2 - 2|x|} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases} \quad ; x_0 = 0$$

$$2/ \begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x-4} \; ; 0 \leq x < 4 \\ f(4) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4} \quad ; x > 4 \end{cases} \quad ; x_0 = 4$$

Exercice 8

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 + 6}{3x-2} \quad ; x \leq -1 \\ f(x) = \cos(\pi x) \quad ; -1 < x \leq 1 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} \; ; x \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$I =]0;+\infty[$; $J =]0;1[$; $K =]-\infty;-1]$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2x-3 \ ; \ x<2 \\ f(x)=x^2-3 \ ; \ x\geq 2 \end{cases}$$

1/ Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2/ Déterminer : $f([-2;4])$ *et* $f(]-\infty;1])$

Exercice 11

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0, puis donner ce prolongement :

1/ $f(x)=\dfrac{\sin x}{3x}$ *et* $x_0=0$

2/ $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}$ *et* $x_0=1$

3/ $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{\tan x}$ *et* $x_0=0$ $(a\in]0;+\infty[)$

Exercice 12

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} \ ; \ |x|>1 \\ g(x)=x^2+3x+2 \ ; \ |x|<1 \end{cases}$$

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b/ g admet-elle un prolongement par continuité en $x_0=1$? et en $x_1=-1$?