Exercice 1

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 + x - 3$

1/ Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$

2/ Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\alpha \in \left]1;\frac{3}{2}\right[$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1/ $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$; $I = [0;1]$

2/ $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

3/ $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$; $I = [1;4]$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

1/ $f(x) = x^3 + 2x - 2$; $I = [0;1]$

2/ $f(x) = x^4 + 2x - 5$; $I = [1;+\infty[$

3/ $f(x) = 1 + 2\sin x + 3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6};\pi\right]$

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

2/ Montrer que : $1 < \alpha < 2$

3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

1/ Déterminer D_f

2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-2;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$

c/ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$

1/ a/ Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathbb{R}^*$

b/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$

a/ Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b/ Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$

c/ Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in J$.

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$

1/ Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

2/ Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction h à droite de $x_0 = 1$; et interpréter graphiquement ce résultat

b/ Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[;\ h'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 2)}{\left(\sqrt{x^2 - 1} + 1\right)\sqrt{x^2 - 1}}$

c/ En déduire que h est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[1;\sqrt{2}\right]$; puis dresser son tableau de variation.

4/ Soit g la restriction de h sur l'intervalle . $I = \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b/ Montrer que : $\forall x \in I;\ g(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1} - 1\right)^2$

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J