## Exercice 1

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > \frac{1}{2}$

3) a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 1$

4) Soit $(v_n)$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = \frac{2}{2u_n - 1}$

a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer $v_n$ en fonction de $n$

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \frac{2 + v_n}{2v_n}$ et en déduire $u_n$ en fonction de $n$

5) Calculer les limites des suites $(v_n)$ et $(u_n)$

## Exercice 2

On considère la suite numérique $(a_n)$ définie par : $a_0 = \frac{3}{2}$ et $a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer $a_1$ et $a_2$

b) La suite $(a_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 1 < a_n < 2$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3 - a_n}$

b) En déduire la monotonie de la suite $(a_n)$

c) Justifier que la suite $(a_n)$ est convergente

4) Soit $(b_n)$ la suite définie par : $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $(b_n)$ est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer $b_n$ en fonction de $n$

c) en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_n = 2 \times \frac{1 + 2^{n-1}}{1 + 2^n}$

5) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

## Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{4} \le u_n \le 1$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{1}{n}u_n$

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont il faut donner sa raison et son premier terme

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \frac{n}{2^n}$

3) a) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(n+1)^2 = n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \ge 4$, on a : $n^2 \ge 2^n$

b) Déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

## Exercice 4

On considère $(x_n)$ la suite numérique définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{5x_n+3}{x_n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = 5 - \frac{12}{x_n+3}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le x_n < 3$

c) Etudier le sens de variation de la suite $(x_n)$

d) Justifier que la suite $(x_n)$ est convergente

2) Soit $(y_n)$, la suite numérique définie par : $y_n = \frac{x_n-3}{x_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $(y_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

b) Exprimer $y_n$ puis $x_n$ en fonction de $n$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n$

## Exercice 5

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 1$

b) Etudier les variations de la suite $(u_n)$

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente

2) Soit $(v_n)$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$