Exercice 1

I- Montrer que la suite (u_n) est majorée par M dans les cas suivants :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$; $M = 1$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \sqrt{1+\dfrac{3}{n+1}}$; $M = 2$

II- Montrer que la suite (v_n) est minorée par m, dans les cas suivants :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N});v_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$; $m = \dfrac{1}{2}$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N});v_n = 2n^2+4n+3$; $m = 3$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N});v_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-1}{n+1}$; $m = 0$

III- Soit (w_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N});w_n = 2(-1)^n + cos(n+1)$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});-3 \le w_n \le 3$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});1 \le u_n \le 6$

b/ Etudier le sens de variation de (u_n)

c/ En déduire la convergence de (u_n)

2/ Soit (v_n) *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N});v_n = u_n - 6$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Déterminer v_n *puis* u_n en fonction de n

c/ Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

d/ Calculer en fonction de n les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice 3

Montrer, par récurrence, que :

1/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

5/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 7);3^n < n!$

6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*);n! \le n^n$

7/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 4);2^n \ge n^2$

8/ *Si* $x \in \mathbb{R}^+$, *alors* $(\forall n \in \mathbb{N});(1+x)^n \ge 1+nx$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2);5^n \ge 4^n + 3^n$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N});7^n - 1$ *est divisible par* 6

11/ $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = 4^n + 15n - 1$ *est un multiple de* 9

12/ Si (u_n) *est la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$;

alors : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = 2^n + n + 1$

13/ Si (u_n) *est la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$;

alors : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

14/ Si (u_n) est la suite définie par :

$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)u_n + \dfrac{6}{n+1}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 4n^2 + 12n + 5$

15/ Si (u_n) est la suite définie par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors :

a/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = (n+1)^2$

b/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \ge n^2$

16/ Si $(u_n)_{n\ge 2}$ est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$, alors :

a/ $(\forall n \ge 2);u_n > 0$

b/ $(\forall n \ge 2);C_n^2 \times (u_n)^2 \le n$

c/ $(\forall n\geq 2);u_n\leq\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2-3n+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} +4n-n^3+2n^2-12$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-n}{3n+4}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-3}{5n^2+n-1}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n^2+n+6}{2n^2+3n-7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^3+2n-1}{3n^2-4n+2}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+5}-n+1$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n^2+3}-n+5$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^3+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+n+2}-2n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-n+2$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[4]{n+5}-\sqrt[3]{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nE\left(\dfrac{2}{n}\right)$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{2+3\sqrt{n+5}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+1}-\dfrac{n-2}{1+\sqrt{n+1}}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[4]{n^4+5}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}E\left(\dfrac{n^2+1}{3n+2}\right)$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=3$ et

$u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{4}{u_n}\right)$ pour tout entier naturel n.

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>2$

2/ Etudier la monotonie da la suite (u_n) et en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\leq 3$

3/ a/ Vérifier que :

$(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{u_n}\right)(u_n-2)$

b/ Montrer que :

$(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}-2\leq\dfrac{1}{6}(u_n-2)$

c/ En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_n-2\leq\dfrac{1}{6^n}$

d/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 6

On considère la suite (a_n) définie par : $a_0=1$ et

$a_{n+1}=\dfrac{a_n^3+2}{a_n^2+1}$ pour tout entier naturel n.

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});0<a_n<2$

2/ Etudier le sens de variation de la suite (a_n), et en déduire sa convergence

3/ a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});2-a_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(2-a_n)$

b/ En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});2-a_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

4/ On pose : $(\forall n\in\mathbb{N});S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ .Montrer que :

$(\forall n\in\mathbb{N});S_n\geq 2n-3+5\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Exercice 7

On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0=1\ ,\ x_1=\dfrac{3}{2} \\ 4x_{n+2}-4x_{n+1}+x_n=0;(\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});x_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n\geq 2);2^n\geq C_n^2$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

3/ On pose : $(\forall n\in\mathbb{N});S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k$

a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});S_n=6-4x_{n+2}$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

Exercice 8

Déterminer la limite de la suite (u_n)

1/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=n+1-2\sin n$

2/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=(3-\cos n)\times n^2$

3/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{3n}{\cos(2n)-5}$

4/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{x+\cos(3n)}{2-\sin(n+1)}$

5/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\dfrac{1}{n}\times E\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)$

6/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{2\cos n-n+3}{n+6}$

7/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}\times\sin\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$

8/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ $\left(montrer\ (\forall n\geq 9);n\times 2^n<(n-2)!\right)$

Exercice 9

1/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left[\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

2/ Soit $(H_n)_{n\geq1}$ la suite définie par :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

a/ Montrer que la suite $(H_n)_{n\geq1}$ est croissante

b/ Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N}^*);H_{2n}-H_n\geq\dfrac{1}{2}$

c/ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n=+\infty$

Exercice 10

Soit $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n=2^n\tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

1/ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

2/ Calculer leur limite commune

Exercice 11

Soit $n\in\mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$f_n(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n-1$.

1/ Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $]1;+\infty[$.

2/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1<\alpha_n-1\leq\dfrac{2}{n}$

3/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

Exercice 12

Soit $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation

$(E_n):x^n+x^{n-1}+...+x=1$

1/ Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution a_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $a_n\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

2/ Montrer que la suite (a_n) est décroissante, et en déduire quelle est convergente

3/ Calculer sa limite

Exercice 13

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0=2,\ a_1=\dfrac{4}{9} \\ a_{n+2}=\dfrac{4}{9}a_{n+1}-\dfrac{1}{27}a_n;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

et la suie la suite (b_n) définie par :$(\forall n\in\mathbb{N});b_n=a_n-\dfrac{1}{3^n}$.

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});a_{n+1}=\dfrac{1}{9}a_n+\dfrac{2}{3^{n+2}}$

2/ a/ Montrer que la suite (b_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Exprimer b_n puis a_n en fonction de n

c/ Calculer, en fonction de n, la somme

$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_n$

3/ Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$ et la suite (x_n) définie par :
$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=f(x_n);n\in\mathbb{N} \end{cases}$, et (y_n) définie par :
$(\forall n\in\mathbb{N}^*);y_n=n\times x_n$

1/ Etudier les variations de f sur $[0;1]$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});0<x_n\leq\frac{1}{n+1}$

b/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

3/ a/ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer $\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}$ en fonction de x_{n-1}

b/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1<\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}\leq 1+\frac{1}{n}$

c/ En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);n<\frac{1}{x_n}-1\leq n+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

4/ a/ Montrer que : $(\forall n\geq 2);\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<2\sqrt{n}$

b/ Montrer que la suite (y_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 15

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note $u_n=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

1/ Montrer que :
$(\forall k\in\mathbb{N}^*);\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\leq\frac{1}{3\times\sqrt[3]{k^2}}\leq\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}$

2/ En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sqrt[3]{n+1}-1\leq u_n\leq\sqrt[3]{n}$

3/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt[3]{n}}$

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par :
$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+2n+3;n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1/ Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2/ a/ Démontrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>n^2$

b/ Calculer la limite de la suite (u_n)

3/ Démontrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=(n+1)^2$

Exercice 17

On considère la suite (v_n) définie par :
$(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\frac{n^{10}}{2^n}$

1/ Prouver, pour tout entier naturel n, l'équivalence suivante :
$v_{n+1}\leq 0,95\times v_n\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1,9$

2/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$

a/ Dresser le tableau de variation de la fonction f

b/ Montrer que : $(\exists!\alpha\in]1;+\infty[):f(\alpha)=1,9$

c/ Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0-1\leq\alpha\leq n_0$

d/ Montrer que : $(\forall n\geq 16);\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leq 1,9$

3/ a/ Etudier le sens de variation de la suite (v_n) à partir du rang 16

b/ En déduire la convergence de la suite (v_n)

4/ Montrer que : $(\forall n\geq 16);0<v_n\leq(0,95)^{n-16}\times v_{16}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$