Exercice 1

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a , puis donner son nombre dérivé en a lorsqu'il existe et interpréter le résultat graphiquement :

1/ $f_1(x)=x^3-2x+4\ ;\ a=-1$.

2/ $f_2(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+4}-1}{\sqrt{x}+1}\ ;\ a=4$. 3/ $f_3(x)=\dfrac{x^2+2}{x+2}\ ;\ a=0$

4/ $f_4(x)=(x-1)\left|x^2-1\right|\ ;\ a=1$.

5/ $f_5(x)=1-x^2+\sqrt{x+1}\ ;\ a=0$

6/ $f_6(x)=sin^2(x)\times E\left(\dfrac{x}{2}\right)\ ;\ a=0$

7/ $\begin{cases} f_7(x)=\dfrac{1-cos\,x}{x+sin\,x}\ ;\ x>0 \\ f_7(0)=0 \\ f_7(x)=\dfrac{x^2}{2}\times E\left(\dfrac{1}{2x}\right)\ ;\ x<0 \end{cases}\ ;\ a=0$

8/ $f_8(x)=Arc\tan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\ ;\ a=1$

9/ $\begin{cases} f_9(x)=Arc\tan\left(\dfrac{x}{2\sqrt{x-8}}\right)\ ;\ x>8 \\ f_9(8)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I, dans les cas suivants :

1/ $f(x)=\sqrt{x^2-1}\ ;\ I=]1;+\infty[$

2/ $f(x)=sin\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)\ ;\ I=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$

3/ $f(x)=Arc\tan\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)\ ;\ I=]2;+\infty[$

4/ $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}\ ;\ x\geq 2 \\ f(x)=x+Arc\tan\sqrt{2-x}\ ;\ x<2 \end{cases}\ ;\ I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a et interpréter le résultat graphiquement.

1/ $f_1(x)=\dfrac{\left|x^2-x\right|+2}{|x-1|+1}\ ;\ a=1$.

2/ $f_2(x)=(x-2)E(x)\ ;\ a=2$.

3/ $f_3(x)=\begin{cases} f_3(x)=Arc\tan\left(\dfrac{x}{2\sqrt{x-8}}\right);x>8 \\ f_3(8)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4/ $\begin{cases} f_4(x)=\dfrac{\pi}{2}-Arc\tan\left(\dfrac{1}{|x+1|}\right);\ x\neq -1 \\ f_4(-1)=0 \end{cases}$.

5/ $f_5(x)=(2x-3)\sqrt{x}+1\ ;\ a=1$

6/ $\begin{cases} f_6(x)=(x^2-4x+4)sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right);x>2 \\ f_6(x)=(\sqrt{x}-\sqrt{2})\sqrt{x-2}\ ;\ x\geq 2 \end{cases}$

Exercice 4

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x:

1/ $g_1(x)=2x^3+4x^2-5x+3$.

2/ $g_4(x)=\dfrac{2-x^2}{2x-3x^2-1}$

3/ $g_2(x)=3\sqrt{x}-2x^2+x-4$.

4/ $g_5(x)=\sqrt{5x^2+x+2}$

5/ $g_3(x)=\left(2x^2-3x+7\right)^5$.

6/ $g_8(x)=x(1-|x|)$

7/ $g_6(x)=(1-cos\,x)sin(2x)$.

8/ $g_7(x)=(3x-5)\sqrt{2-x}$

9/ $g_9(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-x$.

10/ $g_{11}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

11/ $g_{15}=sin\left(x+2\sqrt{x}\right)$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)(2-\sqrt{x-1})^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$ puis interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in I$.

c/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3/ a/ Calculer $f''(x)$ $pour\ tout\ x\in]1;+\infty[$.

b/ Etudier la concavité de la courbe (C_f) et donner les coordonnées de son point d'inflexion

4/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $K=[5;+\infty[$

a/ Montrer que g est une bijection de K vers un intervalle J que l'on déterminera. On notera g^{-1} sa fonction réciproque.

b/ Calculer $g^{-1}(9)$ et $(g^{-1})'(9)$.

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Exercice 6

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} h(x)=Arc\tan\sqrt{x+1};\ x\geq -1 \\ h(x)=x+1-\sqrt{x^2+x};\ x<-1 \end{cases}$$
et soit (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$

b/ Etudier la dérivabilité de h en $x_0=-1$ et interpréter le résultat graphiquement

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

b/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_h)

3/ a/ Calculer $h'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

b/ Etudier les variations de la fonction h et dresser son tableau de variation

4/ a/ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point (C_h) à la courbe (T) d'abscisse 0

b/ Construire la courbe (C_h)

5/ Soit g la restriction de h à l'intervalle $I=]-\infty;-1[$.

a/ Montrer que g est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer.

b/ Tracer dans le même repère la courbe $(C_{g^{-1}})$ de la fonction réciproque de g. g^{-1}

c/ Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ $pour\ tout\ x\in J$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)(x-3)(x-4)(x-4)$

Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$

2/ En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);1-\dfrac{x}{2}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\leq 1+\dfrac{x}{2}$

Exercice 9

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1;1[$ par : $g(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1/ a/ Calculer les limites de g aux bornes de $]-1;1[$

b/ Montrer que :

$$\left(\forall x\in\left]-1;1\right[\right);g'(x)=-\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

c/ Dresser le tableau de variation de g

2/ a/ Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left]-1;1\right[$ vers un intervalle J à déterminer

b/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$

3/ a/ Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]-1;1\right[$, et que $\alpha\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$

b/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);\left|g'(x)\right|\leq\frac{8}{5}$

c/ En déduire que :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right);\left|g(x)-\alpha\right|\leq\frac{8}{5}\left|x-\alpha\right|$$