Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-x+2}{3x^2+5x-1}$

b/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+7}{2x^2-4x+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x-x^2}{1+x-2x^2}$

c/ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{14+5x-x^2}{x^3+2x^2+3x+6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x$

d/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+7}+3x$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-x}{\sqrt{1+x}-1}$

e/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-2}-2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}-\sqrt{4-7x}$

f/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sqrt{4x^2+x+1}$

g/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-x-3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{x^2-5x-14}$

h/ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$

i/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt{x^2+4}}{2x+1-\sqrt{4x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt{x^2+8}-3}$

j/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}-x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}+x$

k/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x-1)\sqrt{x^2-x}-2x^2+5x-3}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$

l/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x^2+x-4}{1-2\sqrt{x}+x}$

m/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+1}\left(\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2+3x+3}\right)$

n/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}$

o/ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\tan x}{\cos(2x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

p/ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{x-\pi}\left(\dfrac{2}{\sin(2x)}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

q/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x-\cos^2 x-1}$

r/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x}$

s/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2x)-\sin x}{\tan x+\sin(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos(2x))\sin x}{\tan^3 x}$

t/ $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}+4}{x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

u/ $\lim\limits_{x\to0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(2x)}{E(x)}$

v/ $\lim\limits_{x\to0^+}xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xE(x)-5}{x^2+\cos x}$; $\lim\limits_{x\to0}xE\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

w/ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+E\left(\frac{1}{x}\right)}{x-E\left(\frac{1}{x}\right)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x\cos(x)+3}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\,;x\neq0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f

2/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0=0$

3/ Prouver que f est continue sur D_f

4/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f

Exercice 3

Etudier la continuité de la fonction g en x_0 dans les cas suivants : $a/\ g(x)=\dfrac{|x-2|+1}{x^2+1}$; $x_0=2$

$b/\ \begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}\,;x\neq3 \\ g(3)=3 \end{cases}$; $x_0=3$

c/ $\begin{cases} g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right); x<0 \\ g(0)=0 \\ g(x) = \frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}; x>0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

d/ $\begin{cases} g(x) = \frac{1-\cos^3 x}{x^2}; x \neq 0 \\ g(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$; $x_0 = 0$

e/ $\begin{cases} g(x) = x-1+\cos(\pi x); x \leq 2 \\ g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} \quad ; x>2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

Exercice 4

Déterminer les valeurs du réel a pour que la fonction f soit continue en x_0, dans les cas suivants :

a/ $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2+ax}{x-2}; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $x_0 = 2$.

b/ $\begin{cases} f(x) = \frac{x\sqrt{x+7}-6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}; x \in [0;2[\cup]2;+\infty[\\ f(2) = a \end{cases}$; $x_0 = 2$

c/ $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}-5}{x-10}; x \neq 10 \\ f(10) = \frac{1}{5} \end{cases}$; $x_0 = a$

Exercice 5

1/ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \sin(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité en 0 que l'on déterminera.

2/ Etablir que la fonction g définie sur $[0;4[\cup]4;+\infty[$ $par : g(x) = \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-5}{x-4}$ est prolongeable par continuité en $x_0 = 4$ et déterminer son prolongement par continuité en $x_0 = 4$.

Exercice 6

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x-E(x)}{x+E(x)}$$

1/ Déterminer son ensemble de définition D_h.

2/ a/ Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1$.

b/ La fonction h admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

3/ Montrer que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ *et calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

1/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); f(x) \geq \frac{1}{x}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

2/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}\right); f(x) \leq \frac{1}{x}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I puis déterminer $f(I)$

1) $f(x) = x^2+x+1$; $I = [-1;3]$

2) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$; $I =]-2;2]$

3) $f(x)=2x\sqrt{x+1}$; $I=[0;3[$

4) $f(x)=1+2\sin x+\frac{x}{3}$; $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$

5) $\begin{cases} f(x)=x+2; x\leq 1 \\ f(x)=-3x^2; x>1 \end{cases}$; $I=[-3;2]$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $x^4+x^2+2x-1=0$; $I=[0;1]$

2) $2\sin x=x$; $I=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

3) $x^2-5\sqrt{x}=-1$; $I=[1;4]$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation donnée admet une unique solution α dans l'intervalle donné I :

1) $x^5+x^2+2=0$; $I=[-2;-1]$

2) 2) $x^4+2x=5$; $I=[1;+\infty[$

3) 3) $1+2\sin x=-3x$; $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$