## Exercice 1

I- On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x)=2Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+x^2}$

1/ Etudier les variations de $g$

2/ En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right);g(x)>0$

II- On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right);x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1/ a/ Etudier la parité de $f$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b/ Etudier la continuité de $f$ en 0.

c/ Etudier la dérivabilité de $f$ en 0

2/ a/ Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right); f'(x)=x\,g(x)$

b/ En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$

c/ Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ .

3/ a/ En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que ; $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{+*}\right);0<t-Arc\tan t<t^3$

b/ Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ est une asymptote à la courbe $(C_f)$ en $+\infty$

c/ Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ par rapport à la droite $(\Delta)$ sur $\mathbb{R}^+$

4/ Construire la courbe $(C_f)$.

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que $D_f=\mathbb{R}$

b/ Calculer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$

c/ En déduire les branches infinies de la courbe $(C_f)$

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});(6-x)^2-6(6-x)+10=x^2-6x+10$

b/ En déduire que le point $I(2;0)$ est le centre de symétrie de $(C_f)$

3/ a/ Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

b/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)=\frac{2}{(x^2-6x+10)\sqrt{x^2-6x+10}}$

c/ Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation

4/ a/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f''(x)=\frac{-6(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+10}}$

b/ Etudier la concavité de la courbe $(C_f)$

5/ a/ Déterminer l'équation réduite de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point $I$

b/ Construire la courbe $(C_f)$

6/ a/ Montrer que la fonction $f$ admet une bijection réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle J à déterminer.

b/ Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$

c/ Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

d/ Construire dans le même repère la courbe $(C_{f^{-1}})$

## Exercice 3

**I**- On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = Arc\tan x - x + \dfrac{x^3}{3}$

1/ Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+); |g'(t)| \leq t^4$

2/ En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |g(x)| \leq x^5$

3/ Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Arc\tan x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Arc\tan x - x}{x^3}$

**II**- Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{Arc\tan(\sqrt{x})} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ Montrer que la fonction $f$ est continue à droite en 0

2/ Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement

3/ Déterminer la branche in finie de la courbe $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$

4/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}\left(Arc\tan(\sqrt{x})\right)^2} \times \left[\dfrac{x}{1+x} - \left(Arc\tan(\sqrt{x})\right)^2\right]$

a/ En appliquant le TAF , montrer que : $(\forall t > 0); Arc\tan t > \dfrac{t}{1+t^2}$

b/ En utilisant le TAF, montrer que : $(\forall t > 0); (Arc\tan t)^2 > \dfrac{t^2}{1+t^2}$

5/ Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

6/ Construire la courbe $(C_f)$

## Exercice 4 :

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{1+x^2} > 0$ et en déduire $D_f$

b/ Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$ puis étudier les branches infinies de la courbe $(C_f)$

2/ a/ Montrer que $f$ est dérivable sur $D_f$

b/ Montrer que : $\left(\forall x\in D_f\right); f'(x)=\dfrac{f(x)}{2\sqrt{1+x^2}}$

c/ Dresser le tableau de variation de $f$

3/ Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right); f''(x)=\dfrac{f'(x)}{2\left(1+x^2\right)}\left(\sqrt{1+x^2}-2x\right)$ et en déduire la concavité de $\left(C_f\right)$ et déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.

4/ a/ Démontrer que : $\left(\exists!\alpha\in\left]2;3\right[\right); f(\alpha)=\alpha$

b/ Construire la courbe $\left(C_f\right)$ ( On prendra : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\simeq 0,6$ ; $\sqrt[4]{3}\simeq 1,3$ *et* $\alpha\simeq 2,1$)

5/ Soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ par : $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+1}{2}-f\left(\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{mx^2}{2}$

où m est le réel qui vérifie $\varphi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$

a/ Montrer que : $\left(\exists\beta\in\left]0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\right); f'(\beta)-f'\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{m\beta}{2}$

b/ Montrer que : $\left(\exists\gamma\in\left]\dfrac{\beta}{2};\beta\right[\right); m=f''(\gamma)$

c/ En déduire que : $\left|f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\right|\leq\dfrac{\sqrt[4]{3}}{96}$

## Exercice 5

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right]$ par : $f(x)=x-Arc\tan\sqrt{1-x}$

On note par $\left(C_f\right)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ a/Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b/ Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet une asymptote oblique $(\Delta)$ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation cartésienne

c/ Etudier la position relative de $\left(C_f\right)$ par rapport à la droite $(\Delta)$

2/ a/ Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche de 1 et donner une interprétation graphique de ce résultat

b/ Montrer que : $\left(\forall x\in\left]-\infty;1\right[; f'(x)=1+\dfrac{1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}\right)$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction $f$

3/ Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $\alpha$ tel que $0<\alpha<1$

4/ a/ Donner l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0

b/ Construire $\left(C_f\right)$ ; $(\Delta)$ et $(T)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

5/ a/ Montrer que la fonction $f$ est une bijection de l'intervalle $\left]-\infty;1\right]$ dans un intervalle J à déterminer. On notera $f^{-1}$ sa fonction réciproque b/Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c/ Construire la courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$ de $f^{-1}$ dans le même repère.

## Exercice 6

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - Arc\tan x}{|Arc\tan x|} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ , et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ Etudier la parité de $f$ puis déterminer le domaine d'étude $D_E$ de $f$

2/ Etudier la continuité de $f$ en 0

3/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right); Arc\tan x + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); f(x) - \frac{2}{\pi}x = \frac{1}{\pi \times Arc\tan x} \times \dfrac{2Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1$

d/ En déduire la branche infinie de $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

4/ a/ En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); 0 < \frac{x - Arc\tan x}{x} < \frac{x^2}{1+x^2}$$

b/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); \frac{x}{1+x^2} < Arc\tan x$

c/ En déduire la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement

5/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right); f'(x) = \dfrac{\left(1+x^2\right)Arc\tan x - x}{\left(1+x^2\right)\left(Arc\tan x\right)^2}$

b/ Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^{+}$ puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$

6/ a/ Montrer que : $f''(x) = \dfrac{2\left(x - Arc\tan x\right)Arc\tan x}{\left[\left(1+x^2\right)\left(Arc\tan x\right)^2\right]^2}$

b/ Etudier la concavité de la courbe $\left(C_f\right)$

7/ Construire la courbe $\left(C_f\right)$