



Exercice 1

I- Montrer que la suite (u_n) est majorée par M dans les cas suivants :

$$1/ (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2n+1}{3n+1}; M=1$$

$$2/ (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n+1}}; M=2$$

II- Montrer que la suite (v_n) est minorée par m, dans les cas suivants :

$$1/ (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{2n+1}{n+2}; m = \frac{1}{2}$$

$$2/ (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2n^2 + 4n + 3; m = 3$$

$$3/ (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{\sqrt{n+2} - 1}{n+1}; m = 0$$

III- Soit (w_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = 2(-1)^n + \cos(n+1)$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); -3 \leq w_n \leq 3$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 6$

b/ Etudier le sens de variation de (u_n)

c/ En déduire la convergence de (u_n)

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - 6$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

d/ Calculer en fonction de n les sommes $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Exercice 3

Montrer, par récurrence, que :

$$1/ (\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2/ (\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3/ (\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$4/ (\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$5/ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 7); 3^n < n!$$

$$6/ (\forall n \in \mathbb{N}^*); n! \leq n^n$$

$$7/ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4); 2^n \geq n^2$$



8/ Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}); (1+x)^n \geq 1+nx$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2); 5^n \geq 4^n + 3^n$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N}); 7^n - 1$ est divisible par 6

11/ $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 4^n + 15n - 1$ est un multiple de 9

12/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2^n + n + 1$

13/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2}{2n+1}$

14/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 4n^2 + 12n + 5$

15/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors :

a/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = (n+1)^2$

b/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n^2$

16/ Si $(u_n)_{n \geq 2}$ est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2) : u_n = \sqrt[n]{n} - 1$, alors :

a/ $(\forall n \geq 2); u_n > 0$

b/ $(\forall n \geq 2); C_n^2 \times (u_n)^2 \leq n$

c/ $(\forall n \geq 2); u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 - 3n + 5 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} +4n - n^3 + 2n^2 - 12 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2n+1} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-n}{3n+4} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{5n^2+n-1} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^2+n+6}{2n^2+3n-7} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3+2n-1}{3n^2-4n+2} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+5} - n + 1 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^2+3} - n + 5 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^3+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4n^2+n+2} - 2n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - n + 2 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{n+5} - \sqrt[3]{n+1} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} nE\left(\frac{2}{n}\right) ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2+3\sqrt{n+5}} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} - \frac{n-2}{1+\sqrt{n+1}} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[4]{n^4+5} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}E\left(\frac{n^2+1}{3n+2}\right)$$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$ pour tout entier naturel n .

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

2/ Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 3$



3/ a/ Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) (u_n - 2)$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{6} (u_n - 2)$

c/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 2 \leq \frac{1}{6^n}$

d/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

