Exercice 1

I- Montrer que la suite (u_n) est majorée par M dans les cas suivants :

1/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{2n+1}{3n+1}$; $M=1$

2/ $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\sqrt{1+\dfrac{3}{n+1}}$; $M=2$

II- Montrer que la suite (v_n) est minorée par m, dans les cas suivants :

1/ $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$; $m=\dfrac{1}{2}$

2/ $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=2n^2+4n+3$; $m=3$

3/ $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-1}{n+1}$; $m=0$

III- Soit (w_n) la suite définie par :$(\forall n\in\mathbb{N});w_n=2(-1)^n+cos(n+1)$. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});-3\leq w_n\leq 3$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+3;n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

1/ a/ Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N});1\leq u_n\leq 6$

b/ Etudier le sens de variation de (u_n)

c/ En déduire la convergence de (u_n)

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=u_n-6$

a/ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b/ Déterminer v_n *puis* u_n en fonction de n

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

d/ Calculer en fonction de n les sommes $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}v_k$ *et* $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$

Exercice 3

Montrer, par récurrence, que :

1/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

5/ $(\forall n\in\mathbb{N},n\geq 7);3^n<n!$

6/ $(\forall n\in\mathbb{N}^*);n!\leq n^n$

7/ $(\forall n\in\mathbb{N},n\geq 4);2^n\geq n^2$

8/ *Si* $x \in \mathbb{R}^+$, alors $(\forall n \in \mathbb{N});(1+x)^n \geq 1+nx$

9/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2);5^n \geq 4^n + 3^n$

10/ $(\forall n \in \mathbb{N});7^n - 1$ est divisible par 6

11/ $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = 4^n + 15n - 1$ est un multiple de 9

12/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = 2^n + n + 1$

13/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$; alors : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

14/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right)u_n + \dfrac{6}{n+1}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 4n^2 + 12n + 5$

15/ Si (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, alors :

a/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = (n+1)^2$

b/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n^2$

16/ Si $(u_n)_{n \geq 2}$ est la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$: $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$, alors :

a/ $(\forall n \geq 2);u_n > 0$

b/ $(\forall n \geq 2);C_n^2 \times (u_n)^2 \leq n$

c/ $(\forall n \geq 2);u_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - 3n + 5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} +4n - n^3 + 2n^2 - 12$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-n}{3n+4}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-3}{5n^2+n-1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n^2+n+6}{2n^2+3n-7}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3+2n-1}{3n^2-4n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+5} - n + 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2+3} - n + 5$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^3+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n+2} - 2n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - n + 2$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[4]{n+5} - \sqrt[3]{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nE\left(\dfrac{2}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{2+3\sqrt{n+5}}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \dfrac{n-2}{1+\sqrt{n+1}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[4]{n^4+5}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}E\left(\dfrac{n^2+1}{3n+2}\right)$

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right)$ pour tout entier naturel n.

1/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n > 2$

2/ Etudier la monotonie da la suite (u_n) et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n \leq 3$

3/ a/ Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1}-2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u_n}\right)(u_n-2)$

b/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});0<u_{n+1}-2\leq\frac{1}{6}(u_n-2)$

c/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});0<u_n-2\leq\frac{1}{6^n}$

d/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$