



## Exercice 1 :

1/ Déterminer en extension l'ensemble  $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\}$ .

2/ On considère l'ensemble  $B = \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} / (x, y) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$ .

a/ Montrer que  $0 \notin B$  et que  $\frac{1}{2} \in B$ .

b/ Montrer que  $B \subset ]0;1]$ .

3/ On considère les deux ensembles  $E = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$  et  $F = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Montrer que :  $E \cap F = \emptyset$ .

4/ On considère les deux ensembles  $I = \left\{ n \in \mathbb{N}^* / \frac{6}{n} \in \mathbb{N} \right\}$  et  $J = \{x \in \mathbb{R} / 2x < 5\}$ .

Déterminer  $I \cap J$  et  $I \cup J$ .

## Exercice 2

Simplifier les écritures suivantes :

$A \cap (A \cup B)$  ;  $A \cup (A \cap B)$  ;  $[A \cup (A \cap B)] \cap B$  ;  $A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}$  ;  
 $(A \cap B) \cup (A \cup B)$  ;  $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$ .

## Exercice 3

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble non vide  $E$ .

Montrer que :

$$1/ A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

$$2/ A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B.$$

$$3/ A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B.$$

$$4/ A \Delta B = \overline{A \cap B}.$$

$$5/ A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset.$$

$$6/ A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$$

$$7/ A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E.$$

$$8/ A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

## Exercice 4

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble non vide  $E$ . Montrer que :

$$1/ \left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \Leftrightarrow B = C.$$

$$2/ \left. \begin{array}{l} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus B \subset B \setminus C \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset B.$$

$$3/ A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

$$4/ A \cup [B \cap (A \cup C)] = A \cup (B \cap C).$$

$$5/ A \cap [B \cup (A \cap C)] = A \cap (B \cup C).$$

$$6/ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

$$7/ (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B.$$

$$8/ A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

$$9/ \left. \begin{array}{l} A \cap C \neq \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset.$$

$$10/ \left. \begin{array}{l} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{array} \right\} \Rightarrow A = B \cup C.$$

## Exercice 5

Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{k \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$



$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 11 \leq k^2 \leq 45\}$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

$$E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$$

$$E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 < 2xy \leq 7\}$$

$$E_7 = \left\{x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}), \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1}\right\}$$

$$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}), x^2 \leq 4 + n^3\}$$

$$E_9 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / 0 < 2x \leq y \leq 5\}$$

### Exercice 6

On considère les ensembles suivants :  $A = \left\{n \in \mathbb{Z} / \frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z}\right\}$  et  $B = \{k \in \mathbb{N} / \sqrt{12-k} \in \mathbb{N}\}$

Déterminer en extension :  $A, B, A \cap B, A \cup B, A \cap \bar{B}$  et  $A \times B$

### Exercice 7

1) Donner dans  $\mathbb{R}$  le complémentaire des ensembles suivants :  $\mathbb{R}^*, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, ]-\infty, 4[, ]-3, 5], [3, +\infty[$

2) Soit  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble non vide  $E$ . Montrer les équivalences suivantes :

a)  $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

b)  $\bar{A} \subset B \Leftrightarrow A \cup B = E$

c)  $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$

### Exercice 8

Soit  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E)$ . Montrer que  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

### Exercice 9

$A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ . Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$ , le système  $\begin{cases} X - A = \emptyset \\ X - B = \emptyset \end{cases}$

### Exercice 10

1) Soit  $A, X$  et  $Y$  trois parties d'un ensemble non vide  $E$ .

Montrer que :  $X \cap A = Y \cup A \Leftrightarrow Y \subset A \subset X$

2) Soit  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E)$ . Résoudre dans  $\mathcal{P}(E)$ , l'équation :  $X \cap A = X \cup A$

### Exercice 11

On considère les ensembles suivants :  $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* / x^2 + \frac{1}{y^2} = 2\right\}$  et

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* / x + \frac{1}{y} = 2 \text{ et } x = y\right\}.$$

1) Montrer que  $G \subset H$

2) a-t-on  $G = H$