



Exercice 1 :

1/ Déterminer en extension l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\}$.

2/ On considère l'ensemble $B = \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} / (x, y) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$.

a/ Montrer que $0 \notin B$ et que $\frac{1}{2} \in B$.

b/ Montrer que $B \subset]0;1]$.

3/ On considère les deux ensembles $E = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $F = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Montrer que : $E \cap F = \emptyset$.

4/ On considère les deux ensembles $I = \left\{ n \in \mathbb{N}^* / \frac{6}{n} \in \mathbb{N} \right\}$ et $J = \{x \in \mathbb{R} / 2x < 5\}$.

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

Exercice 2

Simplifier les écritures suivantes :

$A \cap (A \cup B)$; $A \cup (A \cap B)$; $[A \cup (A \cap B)] \cap B$; $A \cup \{[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]\}$;
 $(A \cap B) \cup (A \cup B)$; $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$.

Exercice 3

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble non vide E .

Montrer que :

$$1/ A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$$

$$2/ A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B.$$

$$3/ A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B.$$

$$4/ A \Delta B = \overline{A \Delta B}.$$

$$5/ A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset.$$

$$6/ A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$$

$$7/ A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E.$$

$$8/ A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Exercice 4

Soit A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble non vide E . Montrer que :

$$1/ \left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \Leftrightarrow B = C.$$

$$2/ \left. \begin{array}{l} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus B \subset B \setminus C \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset B.$$

$$3/ A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

$$4/ A \cup [B \cap (A \cup C)] = A \cup (B \cap C).$$

$$5/ A \cap [B \cup (A \cap C)] = A \cap (B \cup C).$$

$$6/ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

$$7/ (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B.$$

$$8/ A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

$$9/ \left. \begin{array}{l} A \cap C \neq \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset.$$

$$10/ \left. \begin{array}{l} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{array} \right\} \Rightarrow A = B \cup C.$$

Exercice 5

Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{k \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$



$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 11 \leq k^2 \leq 45\}$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

$$E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$$

$$E_6 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 < 2xy \leq 7\}$$

$$E_7 = \left\{x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}), \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1}\right\}$$

$$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}), x^2 \leq 4 + n^3\}$$

$$E_9 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / 0 < 2x \leq y \leq 5\}$$

Exercice 6

On considère les ensembles suivants : $A = \left\{n \in \mathbb{Z} / \frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z}\right\}$ et $B = \left\{k \in \mathbb{N} / \sqrt{12-k} \in \mathbb{N}\right\}$

Déterminer en extension : $A, B, A \cap B, A \cup B, A \cap \bar{B}$ et $A \times B$

Exercice 7

1) Donner dans \mathbb{R} le complémentaire des ensembles suivants : $\mathbb{R}^*, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-,]-\infty, 4[,]-3, 5], [3, +\infty[$

2) Soit A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E . Montrer les équivalences suivantes :

a) $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

b) $\bar{A} \subset B \Leftrightarrow A \cup B = E$

c) $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$

Exercice 8

Soit A et B de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Exercice 9

A et B de $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, le système
$$\begin{cases} X - A = \emptyset \\ X - B = \emptyset \end{cases}$$

Exercice 10

1) Soit A, X et Y trois parties d'un ensemble non vide E .

Montrer que : $X \cap A = Y \cup A \Leftrightarrow Y \subset A \subset X$

2) Soit A et B de $\mathcal{P}(E)$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, l'équation : $X \cap A = X \cup A$

Exercice 11

On considère les ensembles suivants : $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* / x^2 + \frac{1}{y^2} = 2\right\}$ et

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* / x + \frac{1}{y} = 2 \text{ et } x = y\right\}.$$

1) Montrer que $G \subset H$

2) a-t-on $G = H$