I - Propositions – Fonctions propositionnelles

1. La proposition

Définition :

Une proposition est un énoncé (un texte) qui a un sens, pouvant être vrai ou faux. Elle est souvent notée par les lettres : p, P, q, Q, r, R…

La valeur de vérité d'une proposition est notée V ou 1 lorsqu'elle est vraie, et par F ou 0 lorsqu'elle est fausse.

Remarque :

Toute proposition peut être vraie ou fausse, mais jamais elle ne peut être vraie et fausse en même temps. On représente la vérité d'une proposition P dans un tableau appelé « tableau de vérité de la proposition P » comme suit :

P
V
F

ou

P
1
0

Exemples :

- P : « $4+5=9$ » est une proposition vraie
- Q : « $\sqrt{10}<\pi$ » est une proposition fausse
- R : « $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ » est une proposition fausse
- T : « 2 est un entier naturel pair et premier » est une proposition vraie

2. Fonction propositionnelle

Définition :

Une fonction propositionnelle est un énoncé ayant un sens, qui contient une variable ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E.

Elle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E.

On note souvent une fonction propositionnelle par : $P(x)$; $P(x,y)$; $P(x,y,z)$ où x, y et z sont des éléments de E

Exemples :

- $P(n):"n\in\mathbb{N};\ n^2-n=2"$ est une fonction propositionnelle. On ne peut pas juger sa véracité.
  Si $n=2$, P(2) est vraie. Mais si $n\neq 2$, P(3) est fausse
- $Q(x,y):"(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+1<y"$ est une fonction propositionnelle. $Q(1,5)$ est une proposition vraie, par contre
  $Q(10,6)$ est fausse
- $R(x,y,z):"(x,y,z)\in\mathbb{N}^{*3};\ x^2+y^2=z^2"$ est une fonction propositionnelle. $R(3,4,5)$ est une proposition
  vraie, et $R(1,4,3)$ est fausse

Remarque :

1- Une fonction propositionnelle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E.

2- La valeur de vérité de $P(x)$ dépend de x

3. Les quantificateurs

3.1. Le quantificateur universel

Définition :

L'expression « quel que soit » s'appelle **le quantificateur universel** et se note $\forall$.

Si "$x \in E; P(x)$"est une fonction propositionnelle, l'expression « quel que soit $x \in E$; $P(x)$ est vraie » se note : « $(\forall x \in E); P(x)$ » et se lit « Quel que soit $x \in E$; $P(x)$ »

L'expression « $(\forall x \in E); P(x)$ » est une proposition et non pas une fonction propositionnelle.

Exemples :

- La proposition « Tout entier naturel est pair ou impair » s'écrit « $(\forall n \in \mathbb{N}); n \text{ est pair ou impair}$ »
- La proposition « le carré de chaque nombre réel est positif ou nul » s'écrit « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$ »
- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$ » est vraie
- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 3 > 0$ » est vraie
- La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \dfrac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$ » est fausse

Remarque :

- Pour dire qu'une proposition est vraie il faut montrer qu'elle est vraie
- Pour dire qu'une proposition est fausse il suffit de donner un contre-exemple

3-2- Le quantificateur existentiel

Définition :

L'expression « il existe au moins » s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note $\exists$.

Si « $x \in E; P(x)$ » est une fonction propositionnelle, l'expression « il existe au moins $x \in E : P(x)$ est vraie » se note : « $(\exists x \in E) : P(x)$ »

L'expression $(\exists x \in E) : P(x)$ est une proposition.

L'expression « il existe un unique $x \in E : P(x)$ » se note $(\exists! x \in E) : P(x)$

Exemples :

- La proposition « il existe au moins un entier naturel n tel que $\sqrt{n^2+7}$ est un entier naturel » s'écrit « $(\exists n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n^2+7} \in \mathbb{N}$ »
- La proposition « il existe un unique nombre réel x tel que $2x^2 - x - 3 = 0$ » s'écrit « $(\exists! x \in \mathbb{R}) : 2x^2 - x - 3 = 0$ »
- La proposition « $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2|x - 3x| + 5x = 0$ » est vraie
- La proposition « $(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2) : 2x - 3y = 1$ » est vraie
- La proposition « $(\exists p \in \mathbb{N}, p > 1) : \dfrac{p+1}{p} \in \mathbb{N}$ » est fausse

3-3- Propositions avec plusieurs quantificateurs

Proposition1

Soit « $(x, y) \in E^2; P(x, y)$ » une fonction propositionnelle. On a :

- Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :
  - $\forall (x, y) \in E^2; P(x, y)$

- ❖ $(\forall x \in E)(\forall y \in E);P(x,y)$
- ❖ $(\forall y \in E)(\forall x \in E);P(x,y)$

➢ Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :

- ❖ $(\exists (x,y) \in E^2):P(x,y)$
- ❖ $(\exists x \in E)(\exists y \in E):P(x,y)$
- ❖ $(\exists y \in E)(\exists x \in E):P(x,y)$

Proposition2

- On peut permuter les quantificateurs de même nature dans une proposition contenant plusieurs quantificateurs sans changer sa vérité :
  $(\forall x \in E)(\forall y \in E);P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y \in E)(\forall x \in E);P(x,y)$
  $(\exists x \in E)(\exists y \in E):P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y \in E)(\exists x \in E):P(x,y)$
- On ne peut pas permuter les quantificateurs de natures différentes : En général, les propositions suivantes ne sont pas équivalentes :
  $(\forall x \in E)(\exists y \in E);P(x,y)$ *et* $(\exists y \in E)(\forall x \in E);P(x,y)$

Exemples :

- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}):x+y=0$ » est vraie
- La proposition « $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}):x+y=0$ » est fausse

II – Opérations sur les propositions

1. Négation d'une proposition

Définition :

La négation d'une proposition P, est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie, et qui est vraie lorsque P est fausse. On la note : $\bar{P}$ *ou* $\neg P$

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Tableau de vérité de la négation

Exemples :

- $P:"2 \leq -6"$; $\bar{P}:"2 > -6"$
- $Q:"\pi^2 = 10"$; $\bar{Q}:"\pi^2 \neq 10"$

Proposition

- ❖ La négation de la proposition « $(\forall x \in E);P(x)$ » est la proposition « $(\exists x \in E);\bar{P}(x)$ »
- ❖ La négation de la proposition « $(\exists x \in E);P(x)$ » est la proposition « $(\forall x \in E);\bar{P}(x)$ »

Exemples :

- La négation de la proposition « $(\exists x \in \mathbb{R}):x^2+x+1=0$ » est la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R});x^2+x+1 \neq 0$ »
- La négation de la proposition « $(\forall n \in \mathbb{Z});\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$ » est la proposition

« $(\exists n \in \mathbb{Z}) : \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$ »

- La négation de la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}_+^*) : x+y>0$ » est la proposition « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) : x+y \leq 0$ »

Définition

La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont vraies en même temps. On la note $(P \text{ et } Q)$ ou $(P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tableau de vérité de la conjonction $P \wedge Q$

Exemples :

- La proposition « $(3 \text{ est un entier impair}) \text{ et } (21 \text{ est premier})$ » est fausse
- La proposition « $(\pi \text{ est un nombre irrationnel}) \text{ et } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x+\frac{1}{x} \geq 2\right)$ » est vraie

3. La disjonction

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition, qui est fausse uniquement lorsque les propositions P et Q sont fausses en même temps. On la note : $(P \text{ ou } Q)$ ou $(P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tableau de vérité de la disjonction $P \vee Q$

Exemples :

- La proposition « $(3 \text{ est un entier impair}) \text{ ou } (21 \text{ est premier})$ » est vraie
- La proposition « $(\pi \text{ est un nombre irrationnel}) \text{ ou } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x+\frac{1}{x} \geq 2\right)$ » est vraie
- La proposition « $(\sqrt{2} \text{ est un nombre rationnel}) \text{ ou } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x+\frac{1}{x} < 2\right)$ » est fausse

Propriété :

La proposition $(\overline{P} ou Q)$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

Démonstration :

Pour démontrer cette proposition on dresse le tableau de vérité de $(\bar{P}ouQ)$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P}ouQ$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Donc La proposition $\bar{P}ouQ$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

4. L'implication

Définition :

La proposition $\bar{P}ouQ$, qui est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse, s'appelle « P implique Q » et se note $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de $(P \Rightarrow Q)$

Exemples :

- La proposition « $(5 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (1 \text{ est un entier premier})$ » est fausse
- La proposition « $(1 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (7 \text{ est un entier premier})$ » est vraie
- La proposition « $(1 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (10 \text{ est un entier premier})$ » est vraie

Propriété :

Dans l'implication $P \Rightarrow Q$:

- Q est une condition nécessaire pour P
- P est une condition suffisante pour Q

5. L'équivalence

Définition :

L'équivalence des deux propositions P et Q est la proposition, qui est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité. On la note $(P \Leftrightarrow Q)$ et on lit « P équivalente à Q »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tableau de vérité de $(P \Leftrightarrow Q)$

Exemples :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} ou Q)$ est une proposition vraie.

Pour montrer cela on doit dresser son tableau de vérité

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} ou Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} ou Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Donc cette proposition est toujours vraie.

- $(51 \text{ est premier}) \Leftrightarrow (5 > 27)$ est une proposition vraie
- $(51 \text{ est impair}) \Leftrightarrow (15 > 127)$ est une proposition fausse

III - Lois logiques

Définition :
Une loi logique est une proposition, constituée de plusieurs propositions, qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Remarque :

- Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, on utilise les tableaux de vérité
- Les lois logiques sont les bases des raisonnements

Propriété :
Soit P, Q et R trois propositions. Alors les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$:(La conjonction est commutative)
- $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$: (La disjonction est commutative)
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$: (l'équivalence est commutative)
- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$: (La conjonction est distributive par rapport à la disjonction)
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$: (La distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction)
- Lois de Morgan :
  - $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
  - $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$
- $[(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
- $[(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: (L'implication est transitive)
- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q})$: (La négation de l'implication)

Exercice :
Parmi les propositions suivantes, laquelle est une loi logique ?

1/ $\overline{[(P \text{ et } Q) ou (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})]} \Leftrightarrow Q$

2/ $\left[P \Rightarrow \left(Q \text{ et } \bar{Q}\right)\right] \Leftrightarrow \bar{P}$

IV - Les raisonnements

1. Raisonnement par déduction

Le principe de déduction est le plus utilisé en mathématiques :

Si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie

Exemple :

Montrer que, pour tout réel x on a : $x^2 - 4x + 5 > 0$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x vérifie l'inéquation $x^2 - 4x + 5 > 0$ alors on : $\Delta = -4 < 0$ donc le trinôme $x^2 - 4x + 5$ a le même signe que $a = 1$. D'où $x^2 - 4x + 5 > 0$ cqfd

2. Raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer que certaines propositions sont vraies on sera amené à distinguer les cas. Ce raisonnement est appelé : **Raisonnement par disjonction des cas**

Exemples :

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel

Pour montrer cette proposition : on distinguera les deux cas : n pair et n impair

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $|x-2| - 2|3+x| = 4$

3. Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux propositions. La proposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ est une loi logique. Donc les deux propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ ont la même vérité.

Le raisonnement par contraposée consiste à : **Montrer $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie**

Exemple :

Montrer que, pour tout entier naturel n tel que n^2 est pair alors n est pair

4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : **Pour montrer** C, **on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et cherche une contradiction** ; ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $(P \Rightarrow Q)$ est vraie

Exemple :

1) Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que : $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b} \Rightarrow a = b$

Raisonnons par l'absurde : Supposons que $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ et $a \neq b$

Comme $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ donc $a + a^2 = b + b^2$, d'où $(a-b)(a+b+1) = 0$, par suite $(a+b+1) = 0$ car $a - b \neq 0$, alors $a + b = -1$ ce qui est contradictoire avec le fait que $a > 0$ et $b > 0$. Donc si $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$ alors $a = b$

2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

5. Raisonnemnt par contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition du type "$\forall x \in E;\ P(x)$" est fausse il suffit de trouver au moins un élément α de E tel $P(\alpha)$ soit fausse . Un tel raisonnement est appelé **raisonnement par cotre-exemple**

Exemple :

1) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,1]\right) : x^2 \geq x$ est fausse

En effet la négation de la proposition P : $\left(\forall x \in [0,1]\right) : x^2 \geq x$ est $\bar{P} : \left(\exists x \in [0,1]\right) : x^2 < x$

En posant $x = \frac{1}{3}$ on a : $x^2 = \frac{1}{9}$ et comme $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$ alors $\left(\exists x = \frac{1}{3} \in [0,1]\right) : x^2 < x$ donc la proposition $\bar{P}$ est vraie d'où la proposition P est fausse

2) Montrer que : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right);\ x^2 + y^2 \geq x + y$

6. Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence

Soit $P(n),\ n \in \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ une fonction propositionnelle, où n_0 est un entier naturel fixé. Pour démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on a $P(n)$, on procède comme suit :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
- Conclusion : $(\forall n \geq n_0);\ P(n)$ est vraie

Principe de récurrence (version pratique)

Montrer que : $(\forall n \geq n_0);\ P(n)$. On suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$ est vraie
  Et montrons que $P(n+1)$ est vraie
- Conclusion : $(\forall n \geq n_0);\ P(n)$ est vraie

Exemples :

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ n^3 + 2n$ est divisible par 3

En effet : On pose $P(n) : 3 \mid n^3 + 2n, n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence :

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $3 \mid 0^3 + 2 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ; c-à-d $\left(\exists k \in \mathbb{N}\right) : n^3 + 2n = 3k$
  Et montrons que $P(n+1)$ est vraie c-à-d $\left(\exists k' \in \mathbb{N}\right) : (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$
  On a $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = \left(n^3 + 2n\right) + 3\left(n^2 + n + 1\right)$
  $= 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1) = 3k'$ où $k' = k + n^2 + n + 1$
  Donc $P(n+1)$ est vraie
- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N});\ n^3 + 2n$ est divisible par3

2) Montrer, par récurrence, que : $(\forall n \geq 5);\ 2^n \geq 6n$

7. Raisonnement par analyse – synthèse

Le raisonnement par **analyse-synthèse** pour déterminer les solutions d'un problème lorsque la rédaction est délicate :

- Dans la première partie **analyse**, on détermine toutes les solutions éventuelles de ce problème
- La seconde partie **synthèse,** On élimine les solutions de l'analyse qui ne vérifient pas toutes les conditions

Exemple :

Déterminer toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\left(\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2\right);\ f(n+m)=f(n)+f(m)$