



I - Propositions – Fonctions propositionnelles

1. La proposition

Définition :

Une proposition est un énoncé (un texte) qui a un sens, pouvant être vrai ou faux. Elle est souvent notée par les lettres : $p, P, q, Q, r, R...$

La valeur de vérité d'une proposition est notée V ou 1 lorsqu'elle est vraie, et par F ou 0 lorsqu'elle est fausse.

Remarque :

Toute proposition peut être vraie ou fausse, mais jamais elle ne peut être vraie et fausse en même temps. On représente la vérité d'une proposition P dans un tableau appelé « tableau de vérité de la proposition P » comme suit :

P
V
F

ou

P
1
0

Exemples :

- P : « $4 + 5 = 9$ » est une proposition vraie
- Q : « $\sqrt{10} < \pi$ » est une proposition fausse
- R : « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est une proposition fausse
- T : « 2 est un entier naturel pair et premier » est une proposition vraie

2. Fonction propositionnelle

Définition :

Une fonction propositionnelle est un énoncé ayant un sens, qui contient une variable ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E .

Elle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E .

On note souvent une fonction propositionnelle par : $P(x)$; $P(x, y)$; $P(x, y, z)$ où x, y et z sont des éléments de E

Exemples :

- $P(n)$: " $n \in \mathbb{N}$; $n^2 - n = 2$ " est une fonction propositionnelle. On ne peut pas juger sa véracité. Si $n = 2$, $P(2)$ est vraie. Mais si $n \neq 2$, $P(3)$ est fausse
- $Q(x, y)$: " $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x + 1 < y$ " est une fonction propositionnelle. $Q(1, 5)$ est une proposition vraie, par contre $Q(10, 6)$ est fausse
- $R(x, y, z)$: " $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$; $x^2 + y^2 = z^2$ " est une fonction propositionnelle. $R(3, 4, 5)$ est une proposition vraie, et $R(1, 4, 3)$ est fausse

Remarque :

- 1- Une fonction propositionnelle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable ou les variables par des éléments donnés de E .
- 2- La valeur de vérité de $P(x)$ dépend de x

3. Les quantificateurs



3.1. Le quantificateur universel

Définition :

L'expression « quel que soit » s'appelle **le quantificateur universel** et se note \forall .

Si " $x \in E; P(x)$ " est une fonction propositionnelle, l'expression « quel que soit $x \in E ; P(x)$ est vraie » se note : « $(\forall x \in E); P(x)$ » et se lit « Quel que soit $x \in E ; P(x)$ »

L'expression « $(\forall x \in E); P(x)$ » est une proposition et non pas une fonction propositionnelle.

Exemples :

- La proposition « Tout entier naturel est pair ou impair » s'écrit « $(\forall n \in \mathbb{N}); n \text{ est pair ou impair}$ »
- La proposition « le carré de chaque nombre réel est positif ou nul » s'écrit « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$ »
- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0$ » est vraie
- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + x + 3 > 0$ » est vraie
- La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{n+1}{n} \notin \mathbb{N}$ » est fausse

Remarque :

- Pour dire qu'une proposition est vraie il faut montrer qu'elle est vraie
- Pour dire qu'une proposition est fausse il suffit de donner un contre-exemple

3-2- Le quantificateur existentiel

Définition :

L'expression « il existe au moins » s'appelle **le quantificateur existentiel** et se note \exists .

Si « $x \in E; P(x)$ » est une fonction propositionnelle, l'expression « il existe au moins $x \in E : P(x)$ est vraie » se note : « $(\exists x \in E); P(x)$ »

L'expression « $(\exists x \in E); P(x)$ » est une proposition.

L'expression « il existe un unique $x \in E : P(x)$ » se note « $(\exists! x \in E); P(x)$ »

Exemples :

- La proposition « il existe au moins un entier naturel n tel que $\sqrt{n^2 + 7}$ est un entier naturel » s'écrit « $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n^2 + 7} \in \mathbb{N}$ »
- La proposition « il existe un unique nombre réel x tel que $2x^2 - x - 3 = 0$ » s'écrit « $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x^2 - x - 3 = 0$ »
- La proposition « $(\exists x \in \mathbb{R}); 2|x - 3x| + 5x = 0$ » est vraie
- La proposition « $(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2); 2x - 3y = 1$ » est vraie
- La proposition « $(\exists p \in \mathbb{N}, p > 1); \frac{p+1}{p} \in \mathbb{N}$ » est fausse

3-3- Propositions avec plusieurs quantificateurs

Proposition 1

Soit « $(x, y) \in E^2; P(x, y)$ » une fonction propositionnelle. On a :

- Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :
 - ❖ $\forall (x, y) \in E^2; P(x, y)$



$$\diamond (\forall x \in E)(\forall y \in E); P(x, y)$$

$$\diamond (\forall y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$$

➤ Les 3 propositions suivantes ont la même vérité :

$$\diamond (\exists (x, y) \in E^2); P(x, y)$$

$$\diamond (\exists x \in E)(\exists y \in E); P(x, y)$$

$$\diamond (\exists y \in E)(\exists x \in E); P(x, y)$$

Proposition 2

- On peut permuter les quantificateurs de même nature dans une proposition contenant plusieurs quantificateurs sans changer sa vérité :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E); P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$$

$$(\exists x \in E)(\exists y \in E); P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y \in E)(\exists x \in E); P(x, y)$$

- On ne peut pas permuter les quantificateurs de natures différentes : En général, les propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

$$(\forall x \in E)(\exists y \in E); P(x, y) \text{ et } (\exists y \in E)(\forall x \in E); P(x, y)$$

Exemples :

- La proposition « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 0$ » est vraie
- La proposition « $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 0$ » est fausse

II – Opérations sur les propositions

1. Négation d'une proposition

Définition :

La négation d'une proposition P, est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie, et qui est vraie lorsque P est fausse. On la note : \bar{P} ou $\neg P$

P	\bar{P}
1	0
0	1

Tableau de vérité de la négation

Exemples :

- $P : "2 \leq -6"$; $\bar{P} : "2 > -6"$
- $Q : "\pi^2 = 10"$; $\bar{Q} : "\pi^2 \neq 10"$

Proposition

- La négation de la proposition « $(\forall x \in E); P(x)$ » est la proposition « $(\exists x \in E); \bar{P}(x)$ »
- La négation de la proposition « $(\exists x \in E); P(x)$ » est la proposition « $(\forall x \in E); \bar{P}(x)$ »

Exemples :

- La négation de la proposition « $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 = 0$ » est la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 \neq 0$ »
- La négation de la proposition « $(\forall n \in \mathbb{Z}) ; \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{N}$ » est la proposition



« $(\exists n \in \mathbb{Z}) : \sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$ »

- La négation de la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}_+) : x + y > 0$ » est la proposition
« $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+) : x + y \leq 0$ »

Définition

La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont vraies en même temps. On la note $(P \text{ et } Q)$ ou $(P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tableau de vérité de la conjonction $P \wedge Q$

Exemples :

- La proposition « $(3 \text{ est un entier impair}) \text{ et } (21 \text{ est premier})$ » est fausse
- La proposition « $(\pi \text{ est un nombre irrationnel}) \text{ et } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+) ; x + \frac{1}{x} \geq 2 \right)$ » est vraie

3. La disjonction

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition, qui est fausse uniquement lorsque les propositions P et Q sont fausses en même temps. On la note : $(P \text{ ou } Q)$ ou $(P \vee Q)$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tableau de vérité de la disjonction $P \vee Q$

Exemples :

- La proposition « $(3 \text{ est un entier impair}) \text{ ou } (21 \text{ est premier})$ » est vraie
- La proposition « $(\pi \text{ est un nombre irrationnel}) \text{ ou } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+) ; x + \frac{1}{x} \geq 2 \right)$ » est vraie
- La proposition « $(\sqrt{2} \text{ est un nombre rationnel}) \text{ ou } \left((\forall x \in \mathbb{R}_+) ; x + \frac{1}{x} < 2 \right)$ » est fausse

Propriété :

La proposition $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

Démonstration :



Pour démontrer cette proposition on dresse le tableau de vérité de $(\bar{P} \vee Q)$

P	Q	\bar{P}	$\bar{P} \vee Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Donc La proposition $\bar{P} \vee Q$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse

4. L'implication

Définition :

La proposition $\bar{P} \vee Q$, qui est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse, s'appelle « P implique Q » et se note $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tableau de vérité de $(P \Rightarrow Q)$

Exemples :

- La proposition « $(5 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (1 \text{ est un entier premier})$ » est fausse
- La proposition « $(1 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (7 \text{ est un entier premier})$ » est vraie
- La proposition « $(1 \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (10 \text{ est un entier premier})$ » est vraie

Propriété :

Dans l'implication $P \Rightarrow Q$:

- Q est une condition nécessaire pour P
- P est une condition suffisante pour Q

5. L'équivalence

Définition :

L'équivalence des deux propositions P et Q est la proposition, qui est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité. On la note $(P \Leftrightarrow Q)$ et on lit « P équivalente à Q »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tableau de vérité de $(P \Leftrightarrow Q)$

**Exemples :**

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$ est une proposition vraie.

Pour montrer cela on doit dresser son tableau de vérité

P	Q	\bar{P}	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \text{ ou } Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Donc cette proposition est toujours vraie.

- $(51 \text{ est premier}) \Leftrightarrow (5 > 27)$ est une proposition vraie
- $(51 \text{ est impair}) \Leftrightarrow (15 > 127)$ est une proposition fausse

III - Lois logiques**Définition :**

Une loi logique est une proposition, constituée de plusieurs propositions, qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Remarque :

- Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, on utilise les tableaux de vérité
- Les lois logiques sont les bases des raisonnements

Propriété :

Soit P, Q et R trois propositions. Alors les propositions suivantes sont des lois logiques :

- ❖ $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$: (La conjonction est commutative)
- ❖ $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$: (La disjonction est commutative)
- ❖ $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$: (l'équivalence est commutative)
- ❖ $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$: (La conjonction est distributive par rapport à la disjonction)
- ❖ $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$: (La distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction)
- ❖ Lois de Morgan :
 - $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
 - $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$
- ❖ $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
- ❖ $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: (L'implication est transitive)
- ❖ $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \bar{Q})$: (La négation de l'implication)

Exercice :

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une loi logique ?

$$1/ \left[(P \text{ et } Q) \text{ ou } (\bar{P} \text{ et } \bar{Q}) \right] \Leftrightarrow Q$$



$$2/ [P \Rightarrow (Q \text{ et } \bar{Q})] \Leftrightarrow \bar{P}$$

IV - Les raisonnements

1. Raisonnement par déduction

Le principe de déduction est le plus utilisé en mathématiques :

Si P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie

Exemple :

Montrer que, pour tout réel x on a : $x^2 - 4x + 5 > 0$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x vérifie l'inéquation $x^2 - 4x + 5 > 0$ alors on : $\Delta = -4 < 0$ donc le trinôme $x^2 - 4x + 5$ a le même signe que $a = 1$. D'où $x^2 - 4x + 5 > 0$ cqfd

2. Raisonnement par disjonction des cas

Pour démontrer que certaines propositions sont vraies on sera amené à distinguer les cas. Ce raisonnement est appelé : **Raisonnement par disjonction des cas**

Exemples :

1) Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel

Pour montrer cette proposition : on distinguera les deux cas : n pair et n impair

1) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation : $|x - 2| - 2|3 + x| = 4$

3. Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux propositions. La proposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ est une loi logique. Donc les deux propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ ont la même vérité.

Le raisonnement par contraposée consiste à : **Montrer $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie**

Exemple :

Montrer que, pour tout entier naturel n tel que n^2 est pair alors n est pair

4. Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : **Pour montrer C , on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et cherche une contradiction ; ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $(P \Rightarrow Q)$ est vraie**

Exemple :

1) Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que : $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \Rightarrow a = b$

Raisonnons par l'absurde : Supposons que $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$ et $a \neq b$

Comme $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$ donc $a + a^2 = b + b^2$, d'où $(a-b)(a+b+1) = 0$, par suite $(a+b+1) = 0$ car

$a - b \neq 0$, alors $a + b = -1$ ce qui est contradictoire avec le fait que $a > 0$ et $b > 0$. Donc si $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

alors $a = b$

2) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

5. Raisonnement par contre-exemple



Pour montrer qu'une proposition du type " $\forall x \in E; P(x)$ " est fautive il suffit de trouver au moins un élément α de E tel $P(\alpha)$ soit fautive. Un tel raisonnement est appelé **raisonnement par contre-exemple**

Exemple :

1) Montrer que : $(\forall x \in [0,1]) : x^2 \geq x$ est fautive

En effet la négation de la proposition $P : (\forall x \in [0,1]) : x^2 \geq x$ est $\bar{P} : (\exists x \in [0,1]) : x^2 < x$

En posant $x = \frac{1}{3}$ on a : $x^2 = \frac{1}{9}$ et comme $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$ alors $(\exists x = \frac{1}{3} \in [0,1]) : x^2 < x$ donc la proposition \bar{P} est vraie d'où la proposition P est fautive

2) Montrer que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; x^2 + y^2 \geq x + y$

6. Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence

Soit $P(n), n \in \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ une fonction propositionnelle, où n_0 est un entier naturel fixé. Pour démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $P(n)$, on procède comme suit :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
- Conclusion : $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$ est vraie

Principe de récurrence (version pratique)

Montrer que : $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$. On suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, supposons que $P(n)$ est vraie
Et montrons que $P(n+1)$ est vraie
- Conclusion : $(\forall n \geq n_0) ; P(n)$ est vraie

Exemples :

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^3 + 2n$ est divisible par 3

En effet : On pose $P(n) : 3 \mid n^3 + 2n, n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence :

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $3 \mid 0^3 + 2 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ; c-à-d $(\exists k \in \mathbb{N}) : n^3 + 2n = 3k$

Et montrons que $P(n+1)$ est vraie c-à-d $(\exists k' \in \mathbb{N}) : (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$

On a $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$

$$= 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1) = 3k' \text{ où } k' = k + n^2 + n + 1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^3 + 2n$ est divisible par 3

2) Montrer, par récurrence, que : $(\forall n \geq 5) ; 2^n \geq 6n$

7. Raisonnement par analyse – synthèse



Le raisonnement par **analyse-synthèse** pour déterminer les solutions d'un problème lorsque la rédaction est délicate :

- Dans la première partie **analyse**, on détermine toutes les solutions éventuelles de ce problème
- La seconde partie **synthèse**, On élimine les solutions de l'analyse qui ne vérifient pas toutes les conditions

Exemple :

Déterminer toutes les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{R} vérifiant : $(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2); f(n + m) = f(n) + f(m)$

