I – L'ensemble IN

Définition et vocabulaire

- Les nombres : 0, 1, 2, … sont appelés des entiers naturels
- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ est appelé l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{N}^{*}=\{1,2,3,\ldots\}$ est appelé l'ensemble des entiers naturels non nuls
- Soit n un entier naturel, alors $(n+1)$ est aussi un entier naturel. On dit que n et $(n+1)$ sont consécutifs

Proposition

Pour tout $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$, on a :

- $a+b=0 \Leftrightarrow a=b=0$
- $ab=0 \Leftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0)$
- $ab=1 \Leftrightarrow (a=b=1)$

Remarques

- Si a est un entier naturel, on dit que a appartient à $\mathbb{N}$ et on écrit $a\in\mathbb{N}$
- Si b n'est pas un entier naturel, on dit que b n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et on écrit $b\notin\mathbb{N}$
- Soit $A=\{1,5,9,17\}$, on dit que A est une partie de $\mathbb{N}$ et on écrit $A\subset\mathbb{N}$
- Soit $B=\left\{0,3,\frac{1}{5},\sqrt{2}\right\}$, on a B n'est pas une partie de $\mathbb{N}$ car $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$; on écrit alors $B\not\subset\mathbb{N}$

II - Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition1

Soit $a\in\mathbb{N}$ et $d\in\mathbb{N}^{*}$.

On dit que d **divise** a s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $a=dk$

On dit aussi que a est un multiple de d et que d un diviseur de a et l'entier k est appelé le quotient

Définition2

- Un nombre entier naturel n est dit **pair** si et seulement si **2 est un diviseur de n**
- Les nombres pairs sont les entiers naturels : **0,2,4,6,8,10,12…**
- L'ensemble des entiers naturels pairs est $2\mathbb{N}$. On a alors :
  $2\mathbb{N}=\{0,2,4,6,8,\ldots\}$

Proposition1

Un entier naturel n est pair, si et seulement si, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k$

Remarque

Pour montrer qu'un entier naturel n est pair, on montre que n est un multiple de 2, autrement dit on doit trouver un entier naturel k tel que $n=2k$

Ainsi par exemple 514 est pair car $514=2\times 257$

Définition3

- Un nombre entier naturel n est dit **impair** si et seulement si **2 n'est pas un diviseur de n**
- Les nombres impairs sont les entiers naturels : **1,3,5,7,9,11,13…**

Proposition2

Un entier naturel n est impair, si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$

Remarque

Pour montrer qu'un entier naturel est impair, il suffit de montrer qu'il n'est pas pair

Exemples

1) Les entiers naturels $8n+6,\ 2n+46,\ 4n^2+2n+32$ sont des entiers pairs.

En effet : on a $8n+6 = 2(4n+1) = 2k$ où $k = 4n+1$. On procède de la même manière avec les autres

2) Les entiers naturels $6n+11,\ 32n+19,\ 4n^2+10n+91$ sont des entiers impairs

En effet : on a $4n^2+10n+91 = 4n^2+10n+90+1 = 2\left(2n^2+5n+45\right)+1 = 2k+1$ où $k = 2n^2+5n+45$

On procède de la même manière avec les autres entiers

Proposition (opérations sur les entiers pairs et impairs)

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

- Si a et b ont la même parité, alors $a+b$ et $a-b$ sont toujours pairs
  Autrement dit : **pair + pair = pair ; pair − pair = pair ; impair + impair = pair et impair − impair = pair**
- Si a et b sont impairs, alors ab est impair
  Autrement dit : **impair x impair = impair**
- Si au moins l'un des deux entiers a ou b est pair alors ab est pair
  Autrement dit : **pair x impair = pair ; impair x pair = pair**

III – Division euclidienne dans IN

Théorème et définition

Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.

Il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $\begin{cases} a = bq+r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

Cette opération s'appelle **la division euclidienne de** a par b, où l'entier naturel q s'appelle le quotient et r s'appelle le reste de la division euclidienne de a par b

Proposition

Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$.

b est un diviseur de a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0

Autrement dit : s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$

Critères de divisibilité

- Divisibilité par 2
  Un entier naturel est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre est divisible par 2
- Divisibilité par 3
  Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- Divisibilité par 5
  Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5

- Divisibilité par 9

Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9

- Divisibilité par 4

Un entier naturel est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4

- Divisibilité par 25

Un entier naturel est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25

IV – Les diviseurs et les multiples d'un entier naturel

1. Multiples d'un entier naturel

Définition1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Un multiple de n correspond au produit de n avec un autre entier naturel quelconque
- L'ensemble des multiples de n est l'ensemble $\{0, n, 2n, 3n, 4n, \ldots\}$

Proposition1

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } b \text{ est un multiple de } a\\ \text{Si } c \text{ est un multiple de } b\end{array}\right\} \text{alors } c \text{ est un multiple de } a$$

Proposition2

Soit a, b, c et k des entiers naturels tels que $b \geq c$.

- $$\left.\begin{array}{l}\text{Si } b \text{ est un multiple de } a\\ \text{Si } c \text{ est un multiple de } a\end{array}\right\} \text{alors } \left\{\begin{array}{l}b+c \text{ est un multiple de } a\\ b-c \text{ est un multiple de } a\end{array}\right.$$
- Si b est un multiple de a alors bk est un multiple de a

Définition2

Soit a et b deux entiers naturels.

Le plus petit de leurs multiples communs non nuls s'appelle **Le plus petit commun multiple de** a et b, On le note $PPCM(a,b)$ ou $a \vee b$

Exemple

Déterminer $PPCM(3,5)$

On a les multiples de 3 sont : 0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30

Et les multiples de 5 sont : 0,5,10,15,20,25,30

Alors les multiples communs de 3 et 5 sont :0,15,30...

Donc : $PPCM(3,5) = 15$

2. Diviseurs d'un entier naturel

Définition1

Soit a, b deux entiers naturels non nuls.

On dit que a est un diviseur de b, ou que b est divisible par a si :

Il existe un entier naturel k tel que $b = ak$, on note $a \mid b$ et on lit a **divise** b

Autrement dit que b est un multiple de a

Remarque

- 1 est un diviseur de tous les entiers naturels
- Tous les entiers naturels non nuls sont des diviseurs de 0
- Chaque entier naturel non nul est un diviseur de lui-même
- Certains entiers naturels peuvent avoir des diviseurs communs autres que 1

Définition2

d est un diviseur commun de a et b si et seulement si $d \mid a$ et $d \mid b$

Exemple

Déterminer les diviseurs communs de 12 et 18

On a les diviseurs de 12 sont : 1,2,3,4,6,12

Et les diviseurs de 18 sont : 1,2,3,6,9,18

Alors les diviseurs communs de 12 et 18 sont : 1,2,3,6

Proposition

Soit a, b et d des entiers naturels tels que $d \neq 0$.

- Si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid a+b$
- Si $d \mid a$ et $d \mid b$ et $a < b$ alors $d \mid b-a$
- En général si $d \mid a$ et $d \mid b$ et $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}$ alors $d \mid an+bm$

Définition3

Le plus grand parmi tous les diviseurs communs de deux entiers naturels a et b s'appelle le plus grand commun diviseur de a et b . On le note $PGCD(a,b)$

Remarques

- Le seul diviseur entier naturel de 1 est lui-même, donc $PGCD(n,1) = 1$
- Tout entier naturel non nul n est un diviseur de 0, donc $PGCD(n,0) = n$
- On déterminer le $PGCD(a,b)$ en utilisant 3 méthodes (On y reviendra dans le paragraphe VI)

Proposition2

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors on a : $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = ab$ et on a :

$$PPCM(a,b) = \frac{ab}{PGCD(a,b)}$$

V Les nombres premiers

Définitions

- Un entier naturel $p \geq 2$ est dit **premier**, si et seulement si seuls diviseurs sont 1 et lui-même
- Un entier naturel non premier, distinct de 1, est appelé un entier **composé**
- Un entier naturel est un **carré parfait** si sa racine carrée est un entier naturel

Remarque

L'entier naturel 1 n'est pas premier parce qu'il n'admet qu'un seul diviseur 1

Théorème

- Tout entier naturel admet au moins un diviseur premier
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq 1$, alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq 1$, alors n est composé si et seulement si il admet un diviseur p premier tel que $p \leq \sqrt{n}$

Méthode (Comment reconnaitre qu'un entier naturel est premier)

Pour savoir si un entier naturel n est premier ou non, on suit les étapes suivantes :

1) On calcule $\sqrt{n}$
2) On teste la divisibilité de n par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ pris dans l'ordre croissant.
   a) Si l'une de ses divisions donne un reste égal à 0, alors le nombre n n'est pas premier
   b) Si aucune division ne donne un rest égal à 0, alors on conclut que n est premier

Exemple

Le nombre 157 est-il premier ?

En effet ; on a $\sqrt{157} \simeq 12,53$ et on vérifie que ni 2, ni 3, ni 5, ni 7, ni 11 ne divise 157. Alors 157 est premier

Remarque

Le crible d'Erathostène permet de donner les nombres premiers inférieurs à 100

VI – Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Proposition

- L'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini
- Tout entier naturel $n \geq 2$, se décompose en un produit fini de nombres premiers
- Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe des nombres premiers distincts deux à deux $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et il existe des entiers naturels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_k$ et $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$
- Le nombre de diviseurs de n est égal à $(1+a_1)(1+a_2)(\ldots)(1+a_k)$

Exemple

Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 2250

2250	2
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Alors : $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$

Méthodes de détermination du PGCD et du PPCM

1ere méthode (Méthode des diviseurs communs)

Déterminer $PGCD(42,45)$ et $PPCM(42,45)$

On a : $\mathcal{D}(42) = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$ et $\mathcal{D}(45) = \{1,3,5,9,15,45\}$, donc l'ensemble des diviseurs communs de 42 et 45 est $\{1,3\}$. D'où $PGCD(42,45) = 3$ et on a :

$$PPCM(42,45) = \frac{42 \times 45}{PGCD(42,45)} = \frac{1890}{3} = 630$$

2eme méthode (Méthode de l'algorithme d'Euclide)

On a : $45 = 42\times1+3$
$42 = 3\times14+0$

Alors $PGCD(42,45)=3$ et de la même manière on a $PPCM(42,45)=630$

3eme méthode (Méthode des décompositions en produit de facteurs premiers)

On a :

42	2
21	3
7	7
1	

45	3
15	3
5	5
1	

Alors $42 = 2\times3\times7$

Et $45 = 3^2\times5$

Donc $PGCD(42,45)=3^1=3$
$et\ PPCM(42,45)=2\times3\times7\times3\times5=630$

Remarque

Pour déterminer le PGCD et Le PPCM de deux entiers, on choisira la méthode la plus économique entre les 3 méthodes citées en haut, selon les situations. Sans vous cacher que la plus usitée est la méthode utilisant les décompositions en produit de facteurs premiers