I – Les ensembles

1. Définition et vocabulaires

Définition et notations

Un ensemble E est une collection d'objets satisfaisants à des propriétés. Chaque objet est appelé **Elément** de l'ensemble E.

En plus si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$ et si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$

Ensembles usuels

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} =$ L'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\} =$ L'ensemble des entiers naturels non nuls

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} =$ L'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots,-2,-1,1,2,\ldots\} =$ L'ensemble des entiers relatifs non nuls

$D = \left\{\dfrac{p}{10^n} / \ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\right\} =$ L'ensemble des nombres décimaux

$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} / \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\} =$ L'ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R} =$ L'ensemble des nombres réels

Et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\varnothing = \{\ \} =$ L'ensemble vide

$\{a\} =$ Le singleton a

$\{a,b\} =$ la paire

Définition

Un ensemble E peut être défini de deux manières possibles :

- **En extension** : Lorsque l'ensemble est donné explicitement avec tous ses éléments ; $E = \{a,b,c,1,2\}$ est une écriture en extension de l'ensemble E
- **En compréhension** : Lorsque l'ensemble est donné par une propriété qui caractérise ses éléments ; $E = \{x \in \mathbb{Z} / |x-2| \le 5\}$

Exercice

1) Ecrire les ensembles suivants en extension :

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{2x+1}{x-1} \le 1\right\} \ ; \ E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\right\} \ ; \ E_3 = \left\{\frac{2n^3-16n}{n+3} \in \mathbb{Z} / n \in \mathbb{N}\right\}$$

3) Donner en compréhension les ensembles suivants :

$F_1 =$ L'ensemble des entiers naturels multiples de 7 ; $F_2 =$ L'ensemble des entiers relatifs dont 3 est le reste de leur division euclidienne par 11 ; $F_3 =$ Le cercle de centre le point $A(-1,2)$ et de rayon 5

2. Egalité – Inclusion – Ensemble des parties d'un ensemble

Définition1

Dire que deux ensembles E et F sont **égaux** signifie qu'ils ne contiennent que des éléments communs, on écrit $E = F$.

Proposition1

Soit E et F deux ensembles.

$E = F \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

Exemple :

Soit $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x(x-1)(x+1)(x-2) = 0\}$. Montrer que $A = B$

Définition2

Soit E et F deux ensembles.

Dire que E est **inclus** dans F signifie que tout élément de E est aussi un élément de F, on dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F ou encore que E est **une partie** de F. On note $E \subset F$

Proposition2

Soit E et F deux ensembles.

$E \subset F \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$

Exemple :

Soit $E = 6\mathbb{N}$ *et* $F = 2\mathbb{N}$. Montrer que $E \subset F$

Définition3

Soit E un ensemble.

L'ensemble de toutes les parties de E est appelé **l'ensemble des parties de** E et est noté $\mathscr{P}(E)$.

Donc $\mathscr{P}(E) = \{X / X \subset E\}$

Exemples

1) Si $E = \{1, 2, a\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}, \{1,2,a\}\}$

2) Si $E = \{\Delta, \nabla\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing; \{\Delta\}; \{\nabla\}; \{\Delta, \nabla\}\}$

3. Opérations sur les ensembles

3.1. Complémentaire d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble et soit A une partie de E .

Le complémentaire de A, dans E , est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on le note $\overline{A}$ ou C_E^A. Donc : $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

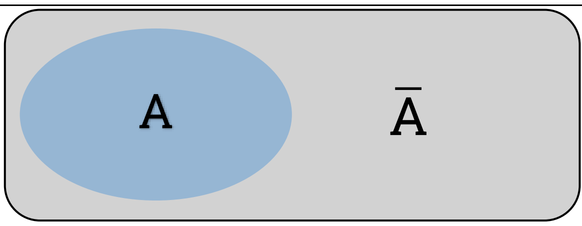


Diagramme de Venn du complémentaire

Proposition

Soit E un ensemble et soit A une partie de E.

- $\overline{E} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{\overline{A}} = A$

3.2. Intersection des ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E.

L'intersection de A et B est la partie de E, constituée de tous les éléments communs de A et B. On la note $A \cap B$. On a : $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$

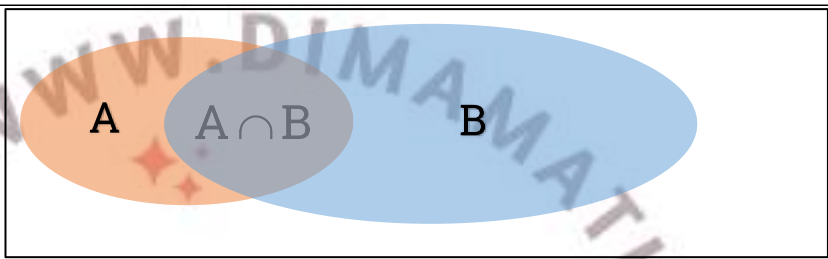


Diagramme de Venn de $A \cap B$

Proposition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E. On a :

- $A \cap A = A$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \cap E = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$ On dit que E est l'élément neutre pour $\cap$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ On dit que $\cap$ est associative
- $A \cap B = B \cap A$ On dit que $\cup$ est commutative
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$ On dit que A et $\overline{A}$ sont disjoints

3.3. Réunion des ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E.

La réunion de A et B est la partie de E, constituée de tous les éléments de A et de tous les éléments de B. On la note $A \cup B$. On a donc : $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

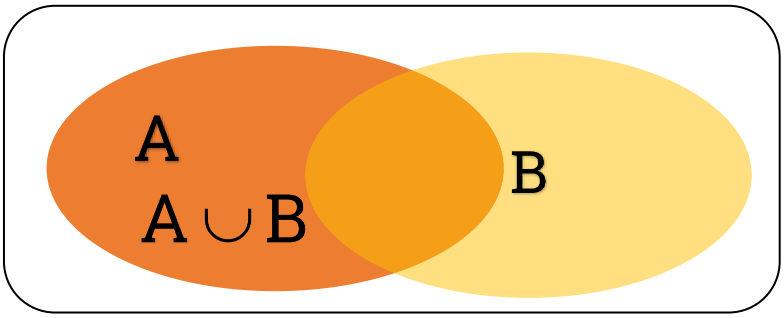


Diagramme de Venn de $A \cup B$

Proposition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E. On a :

- $A \cup A = A$
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
- $A \cup \varnothing = A$ et $A \cup E = E$ On dit que $\varnothing$ est l'élément neutre pour $\cup$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ On dit que $\cup$ est associative
- $A \cup B = B \cup A$ On dit $\cup$ que est commutative
- $A \cup \overline{A} = E$

3.4. Différence des ensembles

Définition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E.
La différence de A et B est la partie de E, constituée de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On la note $A \setminus B$ ou $A - B$. Donc : $A - B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$

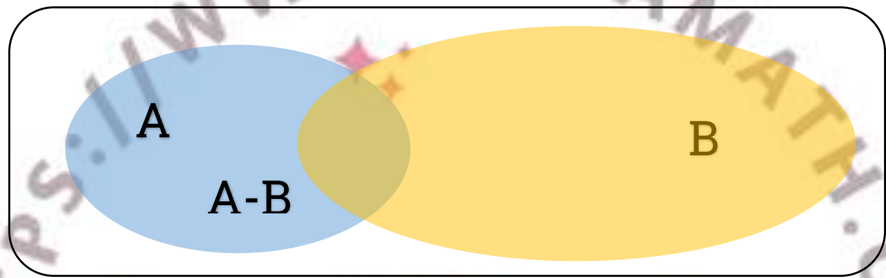


Diagramme de Venn de la différence de A et B

Définition2

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E.
La différence symétrique de A et B est la partie de E notée par $A \Delta B$ et définie par :
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

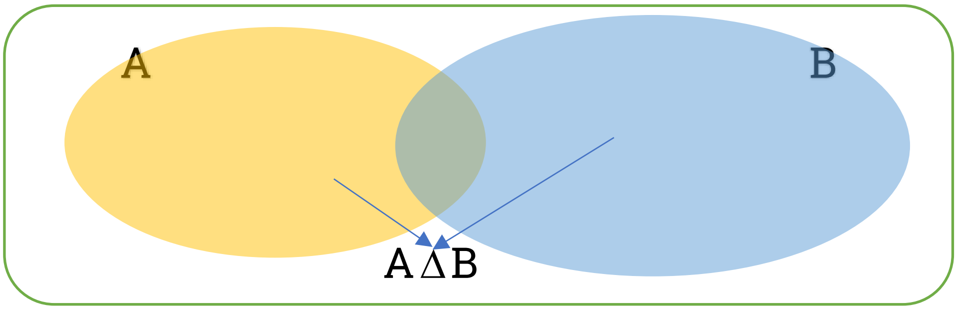


Diagramme de Venn de $A \Delta B$

Proposition

Soit E un ensemble et soit A et B deux parties de E.

- $A - A = \varnothing$ et $A \Delta A = \varnothing$
- $A \Delta B = B \Delta A$ On dit que Δ est commutative
- $A \Delta \varnothing = A$ et $A \Delta E = \overline{A}$

3.5. Partition d'un ensemble

Définition

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de parties d'un ensemble E.

La famille $(A_i)_{1\le i\le n}$ est une partition de E, si et seulement si $\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = E \text{ et } \left[(i\ne j)\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing\right]$

Proposition

Soit E un ensemble et soit A une partie de E. Alors :

A et $\bar{A}$ forment une partition de E

3.6. Propriétés

Propriétés

Soit E un ensemble et soit A, B et C trois parties de E. Alors, on a :

- $A=B \Leftrightarrow A\subset B \text{ et } B\subset A$
- $(A\subset B \text{ et } B\subset C)\Rightarrow A\subset C$
- $A\subset B \Rightarrow (A\cap B = A \text{ et } A\cup B = B)$
- $A\cap B\subset A\subset A\cup B$
- $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ On dit que $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$
- $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ On dit que $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$
- $\bar{A}=E-A$
- $\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$ et $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$: Lois de Morgan*
- $A\subset B\Leftrightarrow \bar{B}\subset\bar{A}$
- $A-B=A\cap\bar{B}$
- $A-B=A-(A\cap B)$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

4. Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles.

Le produit cartésien de E et F est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in E$ et $y\in F$. On le note $E\times F$. Donc : $E\times F=\{(x,y)/\, x\in E \text{ et } y\in F\}$

Remarques

Soit E un ensemble. Alors :

- $E^2=E\times E=\{(x,y)/\, x\in E \text{ et } y\in E\}$
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $E^n=\underbrace{E\times E\times\ldots\times E}_{\text{"}n \text{ fois } E\text{"}}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)/\, x_i\in E,\ 1\le i\le n\}$
- Un élément de E^n s'appelle un n-uplet

Exemples

1) Si $E=\{a,b,c\}$ et $F=\{1,2\}$, alors $E\times F=\{(a,1);(a,2);(b,1);(b,2);(c,1);(c,2)\}$

2) Si f est une fonction définie sur D_f, alors sa courbe $C_f=\{(x,f(x))/\, x\in D_f\}$

II – Les applications

1. Définitions et vocabulaires

1.1. Application

Définition

Soit E et F deux ensembles non vides.

Une application f de E vers F, est une relation qui associe à chaque élément x de E, un unique élément y de F.

L'ensemble E est appelé **l'ensemble de départ** de l'application f et l'ensemble F est appelé son **ensemble d'arrivée.**

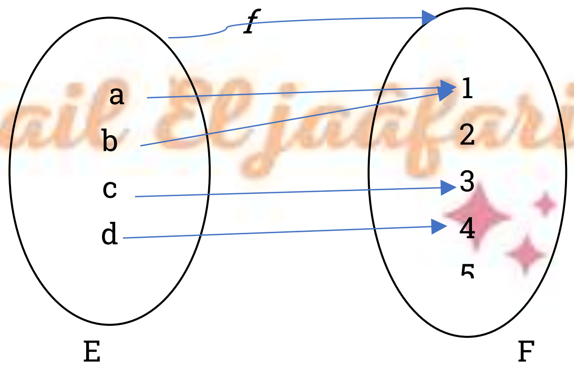
Si $x \in E$ et $y \in F$ tel que $y = f(x)$, x est appelé **un antécédent de** y par l'application f.

Remarque

1) Une application peut être donnée par son expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

2) Une application peut être donnée par la relation : $\begin{cases} f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$

3) Une application peut être donnée par son diagramme :



4) Toute fonction numérique est une application de son domaine de définition dans $\mathbb{R}$

Proposition

Soit E et F deux ensembles non vides.

$f : E \mapsto F$ est une application de E vers F $\Leftrightarrow \left[(\forall x \in E)(\exists ! y \in F) : y = f(x) \right]$

1.2. Egalité de deux applications

Définition

Soit $f : E \to F$ *et* $g : A \to B$ deux applications. Alors :

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} E = A \\ F = B \\ (\forall x \in E),\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Exemple

1) Les deux applications f et g sont égales :

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\quad n\mapsto(-1)^n\times n \qquad \text{et} \qquad g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\quad n\mapsto\begin{cases} n, \text{ si } n \text{ est pair} \\ -n, \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

2) Les applications u, v et w sont différentes :

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^4 \qquad v:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^4 \qquad w:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ x\mapsto x^4$$

2. Image directe et image réciproque d'un ensemble par une application

Définition

Soit f une application de E dans F et A une partie de E et B une partie de F

- L'image directe de A par l'application f est l'ensemble $f(A)=\{f(x)\in F\ /\ x\in E\}$
- L'image réciproque de B par l'application f est l'ensemble $f^{-1}(B)=\{x\in E\ /\ f(x)\in B\}$

Exemple

Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x}$, on a : $f([4,25])=[2,5]$ et $f^{-1}(]-3,3[)=[0,9[$ *et* $f^{-1}(]-\infty,-1[)=\varnothing$

Remarque

- $f(A)=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$
- Si $f^{-1}(B)=\varnothing$ on n'a pas nécessairement $B=\varnothing$ (c-à-d que B peut être différent de $\varnothing$)

3. Injection – Surjection - Bijection

3.1. Application injective

Définition

Soit f une application de E dans F.

On dit que f est injective de E dans F, si et seulement si :

$$\left(\forall(x_1,x_2)\in E^2\right);\ x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Proposition

Soit f une application de E dans F.

f est une injection de E dans F $\Leftrightarrow\left[\left(\forall(x_1,x_2)\in E^2\right);\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\right]$

Exemples

1) L'application $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{2x-1}{x-3}$ est injective

2) L'application $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2-3x+2$ n'est pas injective

3.2. Application surjective

Définition

Soit f une application de E dans F.

On dit que f est surjective de E dans F, si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E

Proposition1

Soit f une application de E dans F.

f est une surjection de E dans F $\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E): f(x) = y$

Remarque

En pratique, pour montrer que f est une surjection de E dans F, on prend un $y \in F$ et on résoud l'équation $f(x) = y$. Alors si elle admet des solutions alors l'application f est surjective sinon elle ne le sera pas

Exemples

1) L'application $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x^2 + 2} \end{array}$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2) L'application $\begin{array}{l} g:[-2,+\infty[\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x+2} \end{array}$ est surjective de $[-2,+\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$

Proposition2

Soit f une application de E dans F.

f est une surjection de E dans F $\Leftrightarrow f(E) = F$

3.3. Application bijective

Définition1

Soit f une application de E dans F.

On dit que f est une bijection de E dans F, si et seulement si elle est injective et surjective de E dans F

Exemples

1) L'application $\begin{array}{l} f:[-1,+\infty[\to [3,+\infty[\\ x \mapsto x^2 + 2x + 4 \end{array}$ est une bijection de $[-1,+\infty[$ dans $[3,+\infty[$

2) L'application $\begin{array}{l} g:\mathbb{R} \to [3,+\infty[\\ x \mapsto x^2 + 2x + 4 \end{array}$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[3,+\infty[$, car elle n'est pas injective

$g(0) = g(-2) = 4$

Proposition

Soit f une application de E dans F.

f est une bijection de E dans F $\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists! x \in E): f(x) = y$

Définition2

Soit f une bijection de E dans F, L'application définie de F dans E qui associe à chaque élément y de F un élément x de E qui vérifie l'équation $f(x)=y$, s'appelle la bijection réciproque de la Bijection f. On la note f^{-1}.

Proposition

Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque. Alors on a :

$$(\forall y\in F)(\forall x\in E),\ f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$$

Exemple

Soit l'application $\begin{cases} f:[-1,+\infty[\to [0,+\infty[\\ \quad x \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$. Montrer que f est une bijection de $[-1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque

Solution

- Soit a et b de $[-1,+\infty[$ tel que $f(a)=f(b) \Rightarrow \sqrt{a-1}=\sqrt{b-1} \Rightarrow a=b$ donc f est injective(1)
- Soit $y\in[0,+\infty[$, résolvons dans l'intervalle $[-1,+\infty[$ l'équation $f(x)=y$

  En effet $f(x)=y \Rightarrow \sqrt{x+1}=y \Rightarrow x+1=y^2 \Rightarrow x=y^2-1$ et comme
  $y\geq 0\ alors\ y^2-1\geq -1\ donc\ x=y^2-1\in[-1,+\infty[$
- D'où f est surjective de $[-1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ (2)

  D'après les résultats (1) et (2) l'application f est bijective $[-1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$
- Soit $x\in[-1,+\infty[$ et $y\in[0,+\infty[$, $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y \Leftrightarrow x=y^2-1$. Alors :

  $\forall x\in[0,+\infty[,\ f^{-1}(x)=x^2-1$ D'où : $\begin{cases} f^{-1}:[0,+\infty[\to [-1,+\infty[\\ \quad x \mapsto x^2-1 \end{cases}$

4. Restriction et prolongement d'une application

Définition1

Soit f une application de E dans F, et soit $A\subset E$.

L'application $\begin{cases} f_A: A\to F \\ \quad x\mapsto f(x) \end{cases}$ est appelée la **restriction** de f sur la partie A de E.

On a alors : $(\forall x\in A),\ f_A(x)=f(x)$

Exemples

1) On considère l'application $\begin{cases} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto 3x-|x-1|+5 \end{cases}$. Déterminer la restriction g de h à l'intervalle $]-\infty,1]$

2) On considère l'application $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto x^2-2x \end{cases}$

a) Justifier que f n'est pas injective

b) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1,+\infty[$ est une bijection de $[1,+\infty[$ $dans$ $[-1,+\infty[$

c) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$

Définition2

Soit f une application de E dans F et soit G un ensemble tel que $E \subset G$.

On appelle prolongement de f à l'ensemble G toute application $\tilde{f}$ de G vers F telle que :

$(\forall x \in G),\ \tilde{f}(x) = f(x)$

Remarque

La restriction d'une application à une partie est unique, par contre on peut avoir en général plusieurs prolongements possibles d'une application à un ensemble

5. Composition des applications

Définition

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.

L'application h définie de E dans G par : $h(x) = g\left(f(x)\right)$ est appelée la composée des applications f et g dans cet ordre. Elle est notée $g \circ f$.

On a alors : $(\forall x \in E),\ g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$

Exemple

On considère les applications $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+3 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2+5 \end{cases}$

Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on conclure ?

Remarques

- Parfois on peut définir $g \circ f$ mais pas $f \circ g$
- Si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies , en général $g \circ f \neq f \circ g$
- Si $f : E \to F;\ g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Proposition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective de E dans G
- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective de E dans G
- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et on a :

  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Si l'application $f : E \to F$ est bijective, alors :

  a) $(\forall x \in E),\ f^{-1} \circ f(x) = x$; on note $f^{-1} \circ f = Id_E$

b) $\left(\forall x \in F\right),\ f \circ f^{-1}(x) = x$; on note $f \circ f^{-1} = Id_F$